素粒子の物理

Physics of Elementary Particles

相原博昭

Aihara Hiroaki

東京大学出版会

Physics of Elementary Particles
Hiroaki AIHARA
University of Tokyo Press, 2006
ISBN4-13-062608-6

はじめに

本書は，東京大学教養学部の理系 1，2 年生を対象とした素粒子物理学の入門的講義と理学部物理学科 4 年生のために行ったもう少し専門的な講義をもとにして書いたものである．素粒子物理について，すでに多くの優れた教科書があるなかで，この本を書こうと思いたったのは，必ずしも物理を専門とする学生だけでなく，物質の最小構成要素である素粒子の世界がどのような法則によって成り立っているのかに興味のある学生にも，素粒子物理のエッセンスであるゲージ理論の論理構造を理解してほしいと思ったからである．

ゲージ理論を基礎としてできあがっている標準理論と呼ばれる素粒子物理の理論体系は，世界中の素粒子物理研究所で得られたほとんどすべての実験結果を説明することができる，非常に強力な理論である．この理論の完成によって素粒子の世界の秩序が見事に理解できるようになった．が，同時にそれは，より基本的な問い，より深い謎への入り口ともなった．著者は，この本で素粒子の世界について，何がどこまでわかっているのか，そして，何がわかっていないのかを必要最小限の予備知識を前提に説明し，その過程において，読者に量子力学や特殊相対性理論といった現代物理の基礎についての入門的知識を習得してもらえるようにデザインした．したがって，高校で学ぶ物理や数学の知識をもとにして素粒子物理の論理構造を概観してもらえるよう，できるだけやさしく書いたつもりである．式の導出についてもなるべく省略せずに書き記した．

本書の構成は次の通りである．第 1 章は，素粒子の世界を概観してもらうための導入部である．ここで初めて素粒子物理の専門用語に出会う読者も多いだろう．抵抗があるかもしれないが，まずは受け入れていただきたい．第 2 章はミクロの世界を記述する物理である量子力学への導入である．ここでの解説は，いわばほんのさわりだけで，波動関数の概念に慣れてもら

うことを目的としている．量子力学を習得するためには，参考文献であげた教科書などを読み，演習問題を解くなどのトレーニングが必要である．第3章は，特殊相対性理論と（素粒子物理の理解に不可欠な）反粒子についての説明である．素粒子物理は，「時間の遅れ」や「ローレンツ収縮」といった相対論的効果を日常的に取り扱う唯一の分野といっていいだろう．素粒子の生成や消滅といった反応を理解するためには，特殊相対性理論の知識が不可欠である．第2章の量子力学の解説とは異なり，この章の特殊相対性理論の解説は，素粒子物理の実験結果を理解するうえで十分な記述になっている．引き続き解説されるディラック方程式もいったん慣れてしまえば難しいものはない．第4章では，顕微鏡でも見えない極微の粒子の大きさをどうやって測るのか，そして，その結果，陽子の内部構造がどのように解明されたのかを解説する．第5章は，標準理論の根幹を成すゲージ対称性の導入からはじめ，素粒子の電磁相互作用と弱い相互作用を統一的に説明することに成功したワインバーグ・サラム理論までを解説する．この章は本書の中心テーマとなるものである．最初は，4元ベクトルやラグランジアンでの記述にとまどうかもしれないが，第3章同様，「慣れる」ことでとまどいは解消されると思う．第6章は，標準理論において，素粒子の質量の起源とされているヒッグス機構について説明している．標準理論において唯一，実験的検証が得られていない部分である．しかし，ここで導入される対称性の自発的破れという概念は，素粒子物理だけでなく物性物理を含む物理全般に見られる重要な指導原理の1つである．さらに，この章は，われわれ素粒子物理研究者が，なぜ標準理論では満足できないのか，なぜより基本的な原理あるいは法則が必要だと思うのかの説明で終わっている．

最初に述べたように，本書では，素粒子物理に興味のある学生に素粒子物理を理解するための論理構造，つまり筋書きを概観してもらうことを目的としている．本書を読んだだけで，素粒子反応の断面積や粒子の寿命など具体的な式の導出や数値の計算ができるようになるわけではない．そのためには，より広範な知識と相応のトレーニングが必要である．しかしながら，著者は，物理の修得はらせん階段を登るようなものだと思っている．限られた専門知識をもとにまず全体を見渡せるようになること，そのうえでさらに専

門的な学習を進めることにより，より効果的に，より早く現代物理の最先端に到達できると考えている．素粒子物理を専門としようとする学生の皆さんには，その意味で役に立てば幸いである．

本書を書くにあたっては，東京大学出版会編集部の丹内利香さんにたいへんお世話になった．お礼申し上げる．

相原博昭

目　次

第 1 章 素粒子とは？

素粒子物理学は，「物質を構成するミクロな要素は何か」，そして，「そのミクロな世界を支配している物理法則は何か」という問いに対する答えを追求する学問である．現在，われわれは，この問いに対して簡明に答えることができる．物質を構成している最小単位は，フェルミオンと呼ばれる粒子である．フェルミオンは，ボゾンと呼ばれる粒子を交換し合うことによって，互いに力を及ぼし合う．この力の及ぼし合いを相互作用という．さらに，この相互作用は，ゲージ原理と呼ばれる物理法則を基礎とする**標準理論**によって，きわめて正確に記述される．こう書くと，読者の皆さんは，今日の素粒子物理学は，先に述べた問いのすべてに答えることができるのだと思うかもしれない．実際，標準理論は，世界中の素粒子物理研究所で得られたほとんどすべての実験結果を説明できるのである．が，同時に，標準理論は，より基本的（あるいは本質的）な問いに何一つ答えることができない．本章では，まず，標準理論の概要を説明し，この「より基本的な問いとは何か」を明らかにする．標準理論についてのよりくわしい説明は，第 5，6 章まで待ってほしい．

1.1 フェルミオンとその質量

物質は，電子と原子核からなり，さらに，原子核は，中性子と陽子からできている．中性子と陽子は，物質の最小構成要素ではなく，u クォークと d クォークと呼ばれる 2 種類のクォークからできている．u と d は，それぞれ $+\frac{2}{3}e$ と $-\frac{1}{3}e$ の電荷をもち，電荷が $1e$ だけ異なる「対」を形成して

いる．ここで，e は，**素電荷**と呼ばれる電荷の基本単位であり，素粒子のもつ電荷は，この素電荷を単位として測ることができる．電子は，$-e$ の電荷を有している．素電荷の測定値は，

$$\boxed{e = 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C}} \tag{1.1}$$

(C は，クーロン) である．u クォークや d クォークの電荷は，この e を単位とすると，それぞれ，$+\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{3}$ という分数で表されるので，**分数電荷**をもっているといわれる．また，「対」の意味は，後に明らかになるが，ここでは2つの粒子が何か共通の性質をもっているとだけ理解しておいてほしい．

さて，クォーク同様，電子 (e) [(1)] も，電荷が $1e$ だけ異なる電子ニュートリノ (ν_e) と対をなしている．電子と電子ニュートリノを総称して，**レプトン**と呼ぶ．クォークもレプトンも大きさのない点粒子であり，これ以上分けることのできない粒子，すなわち，素粒子である．これらの4つの素粒子 (u, d, ν_e, e) が，われわれが日常目にする物質を構成している．したがって，素粒子物理学は，これら4つの素粒子だけを研究する学問であり得たかもしれない．

ところが，不思議なことに，自然界には，あと2つの同様なグループが存在する．(u, d, ν_e, e) を第1のグループ（これを**第1世代**と呼ぶことにする）とすると，残りの2つのグループも第1世代にきわめてよく似ている．異なるのは粒子の質量だけである．ミューオン (μ) とタウレプトン (τ) は，電子のコピーといってもよいレプトンである．ミューオンは，ミューオンニュートリノ (ν_μ) と対をなし，さらに，c クォークと s クォークの対とともに**第2世代**のグループを構成している．**第3世代**のグループは，タウレプトンとタウニュートリノ (ν_τ)，そして t クォークと b クォークである．表1.1に3世代の素粒子グループとその質量，および電荷を示した．3種類のニュートリノは，他の素粒子に比べると無視できるほど小さな質量しかもっておらず，その正確な値はわかっていない．ニュートリノをのぞくと，第3

(1) 電子は，素電荷と同じ記号 e で表されるので，両者を混同しないよう注意してほしい．素電荷は，正の数値であり，電子のもつ電荷は，$(-1) \times e$ である．

表 1.1 クォークとレプトンの周期律表

	クォーク			レプトン		
世代	フレーバー	質量 (MeV/c^2)	電荷 (e)	フレーバー	質量 (MeV/c^2)	電荷 (e)
1	u(アップ)	5	+2/3	ν_e	~ 0	0
	d(ダウン)	8	−1/3	e	0.511	−1
2	c(チャーム)	1,500	+2/3	ν_μ	~ 0	0
	s(ストレンジ)	160	−1/3	μ	105.7	−1
3	t(トップ)	174,000	+2/3	ν_τ	~ 0	0
	b(ボトム)	4,250	−1/3	τ	1,777	−1

世代の素粒子がもっとも重く，第 1 世代の素粒子がもっとも軽い．これら，合計 12 個の素粒子（6 個のクォークと 6 個のレプトン）を，フェルミオンと呼び，さらに，フェルミオンの種類のことをフレーバーと呼ぶ．つまり，自然界には，12 種類のフレーバーをもつフェルミオンが存在していることになる．

負電荷 $(-e)$ をもつレプトン，すなわち，e, μ, τ については，第 3 章に出てくる正電荷 $(+e)$ をもつ反レプトンとの違いをはっきりさせるため，e^-, μ^-, τ^-（反レプトンを e^+, μ^+, τ^+）と表すことが多い．

素粒子の質量は，eV/c^2 という単位で表される．eV は，**電子ボルト**と呼ばれる原子，分子，原子核，素粒子などミクロな粒子を扱う物理で使われるエネルギーの単位であり，電位差（ボルト，V）から導かれる．ここで，1V は，

$$1\,\mathrm{V} \equiv \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{C}} \tag{1.2}$$

で与えられる．J は，ジュールである．1 電子ボルトは，1 個の電子が，電位差 1 ボルトの電極間で得る運動エネルギーの総量として定義される．電子のもつ電荷の絶対値を素電荷と定義したので，電子ボルトとジュールの間には次のような関係がある．

$$1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \times \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{C}} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \tag{1.3}$$

さて，アインシュタイン (Einstein) の**特殊相対性理論**によると粒子の質量 m とエネルギー E には，次のような関係がある．

$$E = mc^2 \tag{1.4}$$

ここで，c は，真空中の光速（約 $3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$）である（特殊相対性理論については，第3章でくわしく説明する）．この式を使うと，質量 m を，E/c^2 の単位，すなわち，eV/c^2 で表すことができる．また，$1\,\mathrm{keV}/c^2 = 10^3\,\mathrm{eV}/c^2$，$1\,\mathrm{MeV}/c^2 = 10^6\,\mathrm{eV}/c^2$，$1\,\mathrm{GeV}/c^2 = 10^9\,\mathrm{eV}/c^2$，$1\,\mathrm{TeV}/c^2 = 10^{12}\,\mathrm{eV}/c^2$ などの単位も頻繁に使われる．$1\,\mathrm{eV}/c^2$ を，日常使い慣れた（MKS 単位系の質量単位）kg に変換してみよう．

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{eV}/c^2 &= 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}/c^2 \\ &= 1.602 \times 10^{-19}(\mathrm{kg \cdot m^2/s^2})/c^2 \\ &= \frac{1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}}{(3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 1.78 \times 10^{-36}\,\mathrm{kg} \end{aligned} \tag{1.5}$$

である．

eV/c^2 質量単位を使うと，たとえば，電子の質量は，$0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$ であり，陽子の質量は，$938.3\,\mathrm{MeV}/c^2$ である．原子分子の質量を表すのに便利な単位原子質量 (atomic mass units, amu) を電子ボルトで表すと，

$$1\,\mathrm{amu} = 931.5\,\mathrm{MeV}/c^2 \tag{1.6}$$

となる．したがって，たとえば，金 (Au) の1原子の質量約 197amu は，$197 \times 931.5\ \mathrm{MeV}/c^2 \approx 183{,}500\ \mathrm{MeV}/c^2$ に対応している．この値と，表1.1 の数値を比べてみると，t クォークは，素粒子でありながら，金原子1個の質量とほぼ等しい質量をもっていることがわかる．表 1.1 にあげたフェルミオンの質量は，実験による測定値である．現在の素粒子理論では，なぜ，これらのフェルミオンの質量が，このような数値になるのかを説明することはできない．どうして，t クォークが金の原子1個に匹敵するような質量をもっているのか．なぜ，ニュートリノは，他のフェルミオンに比べて無視できるほど小さい質量しかもっていないのか．これらの問いに対する答えは，現在まで得られていない．標準理論と呼ばれる現在の素粒子理論におい

ては，フェルミオンの質量は，理論の中に実験値として代入すべき数値であり，その意味で質量パラメータと呼ばれる．質量パラメータは，表 1.1 からわかるように 12 個ある[(2)]．

ミューオン

ミューオンは，質量が電子の約 206 倍である点をのぞけば，電子と同じ性質をもつレプトンである．地表には，$1\,\mathrm{m}^2$ あたり毎秒 150 個程度のミューオンが降り注いでおり，放射線検出器で容易に観測することができる．これらのミューオンは，一次宇宙線と呼ばれる宇宙から飛来する高エネルギーの陽子が，大気中原子の原子核と衝突した結果生じるパイ中間子 ($\pi^{\pm}$) が崩壊してできたものである[(3)]．ミューオンは，より軽いレプトンである電子と 2 種類のニュートリノに崩壊し，その平均寿命は約 2.2 μs（$1\,\mu$s は，10^{-6} s）である．

いま，もし，電子の質量パラメータが，0.511 MeV/c^2 でなく，ミューオンの質量パラメータの値 106.5 MeV/c^2 より大きな値であったら世界はどうなっていたかを想像してみよう．ミューオンはもっとも軽い荷電レプトンとなって崩壊しない．崩壊するのは電子のほうである．したがって，この世界の原子は，原子核とミューオンとでできていることになる．原子のサイズを決めているのは，ボーア (Bohr) 半径と呼ばれる水素原子（1 個の電子と 1 個の陽子の束縛状態）の半径に相当する量であり，電子の質量に反比例する．この電子のかわりにミューオンが束縛されると，原子のサイズは，約 206 分の 1 に縮んでしまう．しかも困ったことに，このミューオンと原子核からなるミューオン原子は，安定ではない．ミューオンは質量数 A（原子核中の陽子 p と中性子 n の総数），原子番号 Z（原子核中の陽子の数）の原子核 (A, Z) の中で原子核のミューオン捕獲という過程を通して消滅してしまう：

---

(2) 正確には，標準理論ではニュートリノは質量をもたないと仮定されているので，質量パラメータは 9 個である．

(3) 1 つの粒子が，より質量の軽い 2 つあるいはそれ以上の他の粒子に変化する過程を，崩壊と呼ぶ．粒子 A が粒子 B と C に崩壊できるためには，エネルギー保存則から $m_{\mathrm{A}}c^2 \geq m_{\mathrm{B}}c^2 + m_{\mathrm{C}}c^2$ でなければならない．

$$\mu^- + (A, Z) \to (A, Z-1) + \nu_\mu \tag{1.7}$$

これは，原子核の中の陽子が

$$\mathrm{p} + \mu^- \to \mathrm{n} + \nu_\mu \tag{1.8}$$

という反応でミューオンを捕獲して，中性子とミューオンニュートリノになってしまうからである．一方，中性子は，電子の質量パラメータが，0.511 MeV/c^2 であれば，

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + e^- + \overline{\nu_e} \tag{1.9}$$

という過程(4)によって崩壊してしまうが，もし，電子の質量パラメータが，1.8 MeV/c^2 より大きくなるとエネルギー保存則によってこの反応は禁止され崩壊できない．同じ理由で，中性子はミューオンにも崩壊できず，この世界においては中性子は安定な粒子となる．したがって，この世界のすべての原子は，いずれ電荷をもたない中性粒子となってしまうはずである．

電子質量パラメータが 0.511 MeV/c^2 である現実の世界においては，このようなことは起こり得ない．

$$\mathrm{p} + e^- \to \mathrm{n} + \nu_e \tag{1.10}$$

という過程において，左辺の質量エネルギーの総和が右辺の質量エネルギーの総和に足りないからである(5)．電子の質量パラメータが十分に小さくなければ，現在の世界はできなかったことになる．この例は，フェルミオンの質量パラメータと宇宙の成り立ちには深い関係があることを示している．

---

(4) この過程は，β 崩壊と呼ばれる．また，反応式中の $\overline{\nu_e}$ は，反電子ニュートリノと呼ばれる電子ニュートリノの「反」粒子である．反粒子については，第 3 章で詳述する．

(5) ただし，いくつかの原子核（たとえば，^{40}K）においては，$(A, Z-1)$ 原子核の質量が (A, Z) 原子核の質量よりも十分に軽いことがあり，電子がミューオン原子同様，原子核に捕獲されることがある．

1.2　相互作用とゲージボゾン

自然界には，**4 種類**の力があることがわかっている．このうち，重力と電磁力は，その到達距離が無限に長いため，その力の影響は巨視的な現象として古くから知られていた．クーロンの法則は，電荷をもつ 2 つの粒子間に働く力，すなわち**電磁相互作用**を記述する法則である．ニュートン（Newton）の万有引力の法則は，質量をもった 2 つの粒子間に働く力，**重力相互作用**を記述している．残りの 2 つの力は，単に**強い力**と**弱い力**と呼ばれている．この 2 つの力のおよぶ距離は原子核の半径程度 (10^{-15}m) で，きわめて短い．弱い力は，重いフェルミオンから軽いフェルミオンへの崩壊に関係した相互作用で，原子核の崩壊もこの弱い力のために起こる．強い力は，陽子と中性子（両者をまとめて核子と呼ぶ）を原子核中に束縛している力，さらに，クォークを核子の中に閉じ込めておく力である．これらの力の起源は，2 つのフェルミオンの間で，ゲージボゾンと総称される素粒子を交換するという相互作用である．「交換する」というかわりに，ゲージボゾンを「放出・吸収する」と表現することも多い．表 1.2 に相互作用の種類と対応するゲージボゾンの名前，質量，そして結合定数（結合定数については 1.3 節参照）をまとめてある．

表 1.2　相互作用のまとめ

種類	ゲージボゾン	質量 (GeV/c^2)	結合定数
強い相互作用	グルーオン	0	$\alpha_S \approx 1$
電磁相互作用	フォトン	0	$\alpha \approx 1/137$
弱い相互作用	W ボゾン	80.4	$\alpha_W \approx 10^{-6}$
	Z ボゾン	91.18	
重力相互作用	グラビトン	0	$\alpha_G \approx 10^{-39}$

電磁相互作用のゲージボゾンであるフォトンは電荷をもたない中性の粒子で，電荷をもったクォークやレプトンは，フォトンを放出あるいは吸収して電磁相互作用をする．このとき，クォークやレプトンのフレーバーは変化しない．**弱い相互作用**は，W^+，W^- および，Z ボゾンと呼ばれるゲージボゾンを，クォークやレプトンが放出・吸収することによって起こる相互作用

である．たとえば，原子核のβ崩壊は，dクォークが，W^-ボゾンとuクォークになり，さらに，そのW^-ボゾンが，電子(e^-)と反電子ニュートリノ$(\overline{\nu_e})$になることによって起こる．このように，フェルミオンは，W^+ボゾンとW^-ボゾンの吸収・放出によって，そのフレーバーを変える．一方，Zボゾンはフォトン同様，中性粒子であり，かつ，フェルミオンのフレーバーを変えない．このように，弱い相互作用には，フレーバーを変えるものと変えないものの2種類があることを覚えておこう．

強い相互作用は，2つのクォークの間で，グルーオンと呼ばれるゲージボゾンを交換する相互作用である．グルーオンは，レプトンの間では交換されないため，レプトンは強い相互作用をしない．グルーオンの放出・吸収によってクォークのフレーバーが変化することはないが，クォークのもつ，カラーと呼ばれるもう1つの性質が変わる．同一フレーバーのクォークであっても，「赤」「青」「緑」の3種類のクォークがある．ただし，クォークに色が着いているわけではなく，次章で説明する量子数の一種である．グルーオンを吸収したuクォークは，uクォークのままで（つまり，同じフレーバーのままで）あるが，そのカラーについては，吸収の前後で，その値が変わっているのである．重力相互作用は，質量をもつ粒子の間に，グラビトンと呼ばれる粒子が交換されることによって起こると説明されている．これら，クォークやレプトンの間で交換される粒子のことをゲージボゾンという．相互作用とは，粒子1（あるいは2）がゲージボゾンを放出し，それを粒子2（あるいは1）が吸収するという過程のことである．

素粒子間の相互作用を図示するのに，ファインマン (Feynman) によって考え出されたきわめて便利な方法がある．これを使って，相互作用を表してみよう．まず，2つの電子が弾性衝突する反応$e^- + e^- \to e^- + e^-$を例にとってみよう．同じ電荷をもつ電子どうしは，クーロン力によって反発し散乱する．すなわち，電子間の電磁相互作用によって散乱するのである．この散乱過程において，それぞれの電子の運動量ベクトル$(\mathbf{p})$が変化する（ただし，和は保存される）：

$$\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_1', \quad \mathbf{p}_2 \neq \mathbf{p}_2'; \qquad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \tag{1.11}$$

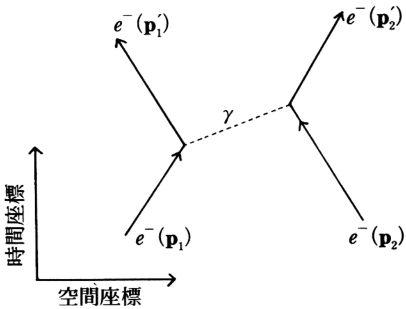


図 **1.1** 電子・電子散乱 ($e^- + e^- \to e^- + e^-$) を表すファインマンダイアグラム

この反応は，一方の電子が中間粒子 (γ) を放出し，もう一方の電子がそれを吸収するという 2 つのステップに分けて考えることができる：

$$e^- \to e^- + \gamma; \qquad \gamma + e^- \to e^- \tag{1.12}$$

すなわち，この中間粒子が，一方の電子から他方の電子へ運動量を運んでいると考えるのである．2 つの電子間で，この中間粒子がやりとりされることで，電磁相互作用が起こる．この中間粒子がフォトンである．この素過程(6)は，ファインマンダイアグラムによって，図 1.1 のように表すことができる．

ファインマンダイアグラムとは，素粒子反応を時間対空間のグラフの上で表現したものである．図 1.1 において，時間は上方に向かって進んでいる．電子は実線で表され，フォトンは破線で表されている．図 1.1 のファインマンダイアグラムが意味するところは，電子と電子がクーロン力によって弾性散乱する過程は，2 つの電子（フェルミオン）の間でフォトン（ゲージボゾン）がやりとりされる電磁相互作用に他ならないということである．図 1.2 は，弱い相互作用の例である原子核の β 崩壊，$d \to W^- + u \to e^- + \overline{\nu_e} + u$ を表すファインマンダイアグラムである．さらに，図 1.3 は，クォークとクォークの間の強い相互作用を表すファインマンダイアグラムで，u ク

(6) 素粒子反応のことを素過程と呼ぶ．

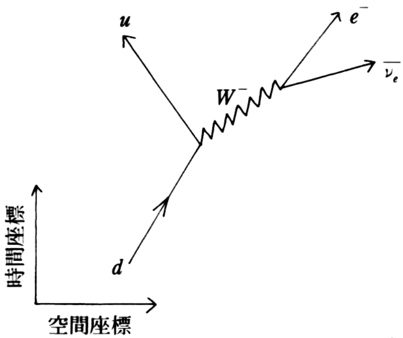


図 1.2　β 崩壊 $d \to W^- + u \to e^- + \overline{\nu_e} + u$

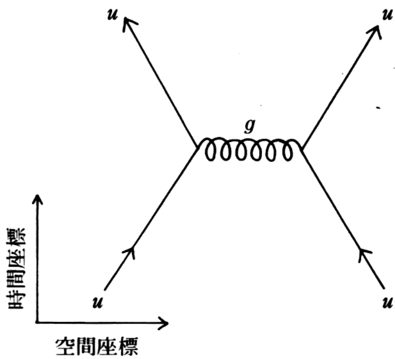


図 1.3　u クォークと u クォークの間のグルーオンの交換

ォークと u クォークの間で，グルーオンが交換されている（通常グルーオンは，らせんで表示される）．このように，ファインマンダイアグラムは，相互作用を視覚化することができるため，素粒子物理学者間の「共通言語」としての役割も果たしている（話す言葉が通じなくても，ファインマンダイアグラムを書けば，どのような素粒子反応を論じているのかを理解しあえるのである）．

1.3　結合定数

前節で述べたように，2 つのフェルミオンがゲージボソンを交換すること

によって，フェルミオン間に力が働く．フェルミオンに直接ふれているのはゲージボゾンであるから，力の強さは，フェルミオンとゲージボゾンとの結合の強さとして表すことができる．この結合の強さを数値として表すには，どうすればよいだろうか．また，弱い相互作用や強い相互作用の結合の強さを，電磁相互作用のそれと比べるにはどうすればよいのだろうか．これが，この節の主題である．クォークやレプトンは，e を単位とする電荷をもっている．そこで，等しい電荷 e をもつ 2 つの粒子の間に働く電磁相互作用を考えてみよう．粒子間に働く力 F はクーロンの法則から，

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{1.13}$$

で与えられる（r は，粒子間の距離である）．ここで，ϵ_0 は，真空の誘電率で，その値は，

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Jm}} \tag{1.14}$$

である．式 (1.13) の中で，$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ は，粒子間の距離によらない，電荷とフォトンの結合の強さを表す係数と考えることができる．

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44 \times 10^{-9}\,\mathrm{eV \cdot m} = 1.44\ \mathrm{eV \cdot nm} \tag{1.15}$$

であるから (1nm=nano m=10^{-9} m)，電荷とフォトンの結合の強さを表す係数は，「エネルギー × 長さ」という次元をもっていることがわかる．ここで，この係数と同じ次元をもつ「相互作用の種類によらない物理定数」197 eV · nm を導入し，電磁相互作用の結合の強さをこの物理定数に対する比として表すことにすると，結合の強さは無次元量で表すことができる．この無次元量は，α と書かれ，

$$\boxed{\alpha \equiv \frac{1.44\ \mathrm{eV \cdot nm}}{197\ \mathrm{eV \cdot nm}} \approx \frac{1}{137}} \tag{1.16}$$

である．α を，電磁相互作用の結合定数と呼ぶ．α は，しばしば**微細構造定数**とも呼ばれる．同様にして，他の 3 つの相互作用の結合の強さも，この共通の物理定数 197 eV · nm に対する比として表すことにすると，それぞれ

の相互作用の結合定数が導かれる．質量 m_1，m_2 の2つの粒子間に働く重力相互作用による引力は，$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ として，

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{1.17}$$

で与えられる．m_1, m_2 として陽子の質量 $m_p = 938\,\mathrm{MeV}/c^2$ を考えると，重力相互作用の結合定数は，

$$\alpha_G = \frac{Gm_p^2}{197\ \mathrm{eV \cdot nm}} = \frac{1.2 \times 10^{-36}\,\mathrm{eV \cdot nm}}{197\ \mathrm{eV \cdot nm}} \approx 6 \times 10^{-39} \tag{1.18}$$

となり，きわめて小さい．したがって，素粒子反応を考える際には重力相互作用は通常無視してかまわない．残り2つの相互作用のうち，強い相互作用の結合定数は，$\alpha_S \approx 1$ で与えられ，電磁相互作用に比べて100倍以上大きい．一方，弱い相互作用の結合定数は，$\alpha_W \approx 10^{-6}$ であり，非常に小さい．これが弱い相互作用と呼ばれる理由に他ならない．

次に，この $197\ \mathrm{eV \cdot nm}$ とはいかなる定数かを説明しよう．すべての粒子は，波としての性質をもっている（このことは第2章でくわしく説明する）．その波の波長は粒子のもつ運動量に反比例する $(\propto 1/p)$．一方，フォトンのように質量のない粒子のエネルギーは，その粒子の運動量に比例する $(\propto p)$．したがって，フォトンのもつエネルギー (E_γ) と波長 (λ_γ) の積は一定となる：

$$E_\gamma \times \lambda_\gamma = \text{定数} \tag{1.19}$$

物理定数 $197\ \mathrm{eV \cdot nm}$ は，この定数を 2π で割ったものである．すなわち，

$$\frac{E_\gamma \times \lambda_\gamma}{2\pi} = 197\ \mathrm{eV \cdot nm} \tag{1.20}$$

である．同様の関係式は，グルーオン，グラビトンについても成り立つ．さらに，大きな質量をもつゲージボゾンである，W ボゾンや Z ボゾンについても，そのエネルギーが質量に比べて十分に大きいときには，この関係式が成り立つ．したがって，$197\ \mathrm{eV \cdot nm}$ は，フェルミオンの間で交換されるゲージボゾンのエネルギーと波長の積（2π をのぞいて）とみなすことができるのである．この積が，なぜ相互作用の種類によらず普遍的な定数である

かは次章で明らかになる．

表 1.2 からわかるように，結合定数の大きさは，相互作用の種類によって大きく異なっている．電磁相互作用の大きさが，弱い相互作用程度しかなかったとしたら，水素原子の半径は，現在の約 1,000 倍程度の大きさになっていただろう．これら結合定数もまた，質量パラメータ同様，現在の宇宙の姿を決定している重要なパラメータである．標準理論は，これらのパラメータがなぜ，現在の数値に設定されているのかについても答えをもっていない．

第 2 章
量子論入門

前章の 1.3 節で，物理定数 197 eV · nm は，相互作用によらずフェルミオンの間で交換されるゲージボゾンのエネルギーと波長の積とみなせると書いた．本章では，この定数が，プランク定数と呼ばれる物理学の基本定数と真空中の光の速さの積（を 2π で割ったもの）に等しいことを示す．プランク定数とは，1900 年にプランク (Planck) が提唱した輻射エネルギーに関する**量子仮説**において導入した定数である．量子力学はここから始まる．この章では，量子論についての入門的解説を行う．

2.1 プランク定数

すべての物質は光，すなわち電磁波を放出する．固体または液体を熱すると赤く光るようになり，さらに熱していくと青く光り，ついには白熱状態になる．物質を構成する原子中の電子が電子間の電磁相互作用によって加速され，加速された電子が電磁波を放出するからである．前章で電磁相互作用は荷電フェルミオン間で，電磁相互作用のゲージボゾン，フォトンを交換することによって起こると書いた．光（電磁波）を量子化したものがフォトンであるが，この節は，古典電磁気学から量子論への展開を説明するのが目的であるから，古典電磁気学によって現象を記述する．すなわち，電子は電磁波を吸収することによって加速され，逆に，加速された電子は電磁波を放出する．巨視的な大きさの物質には非常にたくさんの原子，したがって電子が存在し，それらの電子がつねに，電磁波の吸収・放出をくり返している．吸収過程においては，電磁波は電子の運動エネルギーに変換され，放出過程にお

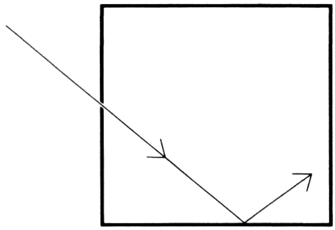


図 2.1　黒体のモデルとしての空洞．空洞の壁は電磁波を通さず，壁に開いた小さな穴から空洞に侵入した電磁波は，穴が十分に小さいため再び外へは出てこれない．

いては電子の運動エネルギーが電磁波に変換される．プランク定数は，この電磁波の波長分布を説明するために導入される．これを説明するために，以下で**黒体輻射**なるものを考える．

黒体とは，外から当たったすべての電磁波を反射することなく完全に吸収する物体のことである．黒体が放出する電磁波（これを黒体輻射という）のスペクトル，すなわち，波長ごとのエネルギー分布は，黒体の形，大きさ，化学成分によらず，黒体の温度のみの関数であることを示すことができる（キルヒホッフ (Kirchhoff) の法則）．20 世紀初頭の物理学の重要課題は，黒体輻射のスペクトルを理論的に導くことであった．完全な黒体を実現するのは難しいが，次のようなモデルについて理論的考察をすることができる．電磁波を通さない壁で囲まれた空洞を考える（図 2.1）．壁は，ある温度で一定に保たれているとする．このとき，壁の 1 カ所に開けられた非常に小さな穴から出てくる電磁波のスペクトルは，黒体輻射のスペクトルと等しい．なぜなら，穴から空洞に侵入した電磁波は，空洞の壁で反射をくり返すうちに，壁で吸収され，（穴が十分に小さいために）再び外へは出てはこれない，すなわち，反射がないからである．空洞内の電磁波は，空洞の壁と熱平衡状態にあり，壁との間で吸収・放出をくり返している．したがって，たまたま，壁の穴の方向に向かって放出され空洞の外へ出てきた電磁波は，空洞内の電磁波と同一のスペクトルをもっている．また，穴から外へ逃げ出したエネルギーと等しいエネルギーが，つねに空洞へ供給されており，空洞の温度はつねに一定に保たれている．

この空洞内に，どれだけのエネルギーを電磁波の形で蓄えることができるかを計算する．それには，空洞内の空間におけるマクスウェル (Maxwell) 方程式を解いて，空洞内に存在する電磁波の数を数え，それに，電磁波1つあたりの平均エネルギーをかければよい．電荷や電流のない空間におけるマクスウェル方程式は，電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ または，磁場 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ についての波動方程式に帰着する：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

ここで，$f(t, x, y, z)$ は，振動する電場または磁場の成分である．電場と磁場は独立でなく，どちらか一方を決めると他方も決まってしまうので，以下では，電場だけについて考えることにする．先ほどのキルヒホッフの法則から，黒体であればどのような物質，形状を考えても，正しいスペクトルが得られるので，簡単のために，金属（正確には無限大の電気電導率をもつ完全導体）でできた，1辺の長さが L の立方体の空洞を考える．このとき，電場は，立方体の境界面において，その面に平行な成分が0であるという境界条件を満たさなければならない．立方体の面は，x, y, z に垂直で，それぞれ，$x = 0, y = 0, z = 0, x = L, y = L, z = L$ にあるとすると，$x = 0, L$ において $E_y = E_z = 0$，$y = 0, L$ において $E_z = E_x = 0$，そして，$z = 0, L$ において $E_x = E_y = 0$ とならなければならない．この条件を満たす波動方程式の解は，

$$\begin{aligned}
E_x &= E_{x0}\cos(n_x\pi x/L)\sin(n_y\pi y/L)\sin(n_z\pi z/L)\sin(\omega t),\\
E_y &= E_{y0}\sin(n_x\pi x/L)\cos(n_y\pi y/L)\sin(n_z\pi z/L)\sin(\omega t),\\
E_z &= E_{z0}\sin(n_x\pi x/L)\sin(n_y\pi y/L)\cos(n_z\pi z/L)\sin(\omega t)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

で与えられる．ここで，E_{x0}, E_{y0}, E_{z0} は，電場の x, y, z 成分の振幅，n_x, n_y, n_z は正の整数(1) である．ω は，角振動数と呼ばれ，式 (2.1) にこの解を代入すると，

(1) 負の整数も正の整数と同じ波を表しているから，正の整数だけを考えればよい．

$$\left(\frac{n_x\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n_y\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n_z\pi}{L}\right)^2=\frac{\omega^2}{c^2} \tag{2.3}$$

が得られる．角振動数は，電磁波の波長 λ と，

$$\omega=\frac{2\pi c}{\lambda} \tag{2.4}$$

の関係にあるから，波長と立方体の辺の長さ L の間には，

$$n_x^2+n_y^2+n_z^2=\frac{4L^2}{\lambda^2} \tag{2.5}$$

という関係があることがわかる．

また，

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2E_x(t,x,y,z)}{dt^2}+\omega^2E_x(t,x,y,z)=0,\\
&\frac{d^2E_y(t,x,y,z)}{dt^2}+\omega^2E_y(t,x,y,z)=0,\\
&\frac{d^2E_z(t,x,y,z)}{dt^2}+\omega^2E_z(t,x,y,z)=0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

が成り立つので，E_x, E_y, E_z は，**調和振動子**の解であり，立方体中の電磁波は，調和振動子とみなせることがわかる．したがって，空洞の中に存在する式 (2.5) で与えられる波長 λ をもつ電磁波の数を数えることは，式 (2.3) で与えられる角振動数 ω の調和振動子の数を数えることに他ならない．そのために，正の整数の組 n_x, n_y, n_z で表される座標空間 $\mathbf{n}=(n_x,n_y,n_z)$ を考えると，この空間の１つ１つの点（格子点）に，x, y, z 方向に振動する調和振動子 E_x, E_y, E_z が対応していると考えることができる．ただし，これら３つの電場成分は独立ではなく，マクスウェル方程式に含まれる電場の「発散」が０という式（ガウス (Gauss) の法則）

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_x}{\partial z}=0 \tag{2.7}$$

によって，

$$E_{x0}n_x+E_{y0}n_y+E_{z0}n_z=0 \tag{2.8}$$

の関係がある．したがって，１つの格子点に対応している互いに独立な調

和振動子の数は，$3-1=2$ 個のみである[(2)]．**n** 空間における半径 $n=\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}$ の球の第 1 象限（球の 1/8 の部分）に含まれる格子点に対応している振動子の総数 N は，$\frac{1}{8}\times\frac{4\pi n^3}{3}\times 2$ 個である．n の取り得る値は 1 から無限大まであるので，振動子の総数は無限個であることに注意しよう．式 (2.5) より，$n=\frac{2L}{\lambda}$ であるから，

$$N=\frac{8\pi L^3}{3\lambda^3} \tag{2.9}$$

で与えられる（λ の値は，0 から無限大までの実数である）．単位体積，単位波長あたりの調和振動子の個数は，式 (2.9) を，箱の体積 L^3 で割り，波長 λ で微分すれば得られる．

$$\frac{1}{L^3}\cdot\frac{dN}{d\lambda}=-\frac{8\pi}{\lambda^4} \tag{2.10}$$

ここでマイナスは，波長が長くなると，振動子の数が減ることを意味している．これで，振動子の数がわかったので，この箱の中にどれだけのエネルギーが蓄えられているかは，調和振動子 1 つあたりの平均エネルギーがわかれば求まる．

熱力学によると，調和振動子の集まりが温度 T で熱平衡にあるとき，各調和振動子は，平均エネルギー k_BT をもつ（**エネルギー等分配則**）．ここで，k_B は，ボルツマン (Boltzmann) **定数**といい，その値は，

$$\begin{aligned} k_B &= 1.380653\times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \\ &= 8.617\times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K} \end{aligned} \tag{2.11}$$

である．したがって，空洞内の電磁波のもつ単位体積，単位波長あたりのエネルギー $du/d\lambda$ は，

$$\frac{du}{d\lambda}=k_BT\times\left|\frac{1}{L^3}\frac{dN}{d\lambda}\right|=\frac{8\pi k_BT}{\lambda^4} \tag{2.12}$$

で与えられる．

次に，壁に開いている小さな穴（開口面積 ΔA）から外へ出ていく，単位

---

(2) 電磁波が横波であり，波の振動方向に 2 つの独立な方向，偏光，があることを意味している．

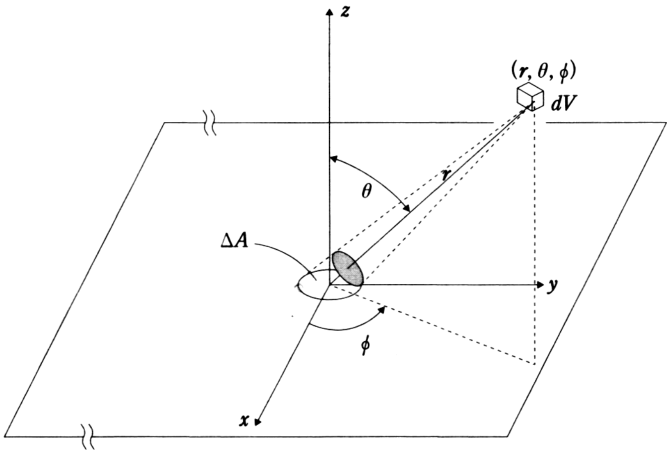


図 2.2　空洞の壁に開いた小さな穴（開口面積 ΔA から Δt 秒間に出ていく電磁波のエネルギーは，穴を中心とする半径 $c\Delta t$ の半球内の微小体積 $dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$ に含まれるエネルギー udV と dV から見た穴の立体角 $\Delta A \cos\theta/(4\pi r^2)$ に比例する．

面積，単位時間，単位波長あたりのエネルギー $dP(\lambda, T)/d\lambda$ を求めてみよう．開口部分に比べて空洞は十分大きいので，壁は平面としてよい．図 2.2 のような開口部の中心を座標原点とする極座標[(3)]を考えると，空洞内の微小体積 $dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$ に含まれるエネルギーは，udV で与えられ，そのうち穴から出ていけるエネルギーは穴の立体角 $\Delta A \cos\theta/(4\pi r^2)$ に比例する（ここで，θ の取り得る値は，0 から $\pi/2$ である）．さらに，電磁波の速度は c であるから，Δt 秒間に外へ逃げていけるエネルギーは，$0 \leq r \leq c\Delta t$ の領域に含まれるエネルギーだけである．したがって，

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\lambda} &= \frac{1}{\Delta A \Delta t}\int_0^{c\Delta t}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{du}{d\lambda}\times\frac{\Delta A\cos\theta}{4\pi r^2}\times r^2\sin\theta\right)drd\theta d\phi \\ &= \frac{1}{\Delta A\Delta t}\frac{du}{d\lambda}\times\frac{\Delta A}{4\pi}\times\int_0^{c\Delta t}dr\times\int_0^1\cos\theta d(\cos\theta)\times\int_0^{2\pi}d\phi \\ &= \frac{1}{\Delta A\Delta t}\frac{du}{d\lambda}\times\frac{\Delta A}{4\pi}\times c\Delta t\times\frac{1}{2}\times 2\pi\end{aligned} \tag{2.13}$$

(3) 付録 A 参照．

$$= \frac{c}{4}\frac{du}{d\lambda}$$

となる．式 (2.13) と (2.12) より，レイリー・ジーンズ (Rayleigh-Jeans) の公式

$$\boxed{\frac{dP}{d\lambda} = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4}} \tag{2.14}$$

が導ける．

レイリー・ジーンズの公式は，マクスウェル方程式と熱力学のエネルギー等分配則とから導かれたわけであるが，この公式が重大な欠陥を含んでいるのは明らかである．$dP/d\lambda$ を全波長にわたって積分すると，有限温度 $(T \neq 0)$ では，

$$P(T) = \int_0^\infty \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4} d\lambda = -\frac{2\pi c k_B T}{3\lambda^3}\bigg|_0^\infty \to \infty \tag{2.15}$$

となり，短波長側で発散してしまう．したがって，絶対零度でない限り空洞内は無限大のエネルギーで満ちていることになる．さらに，波長の短い光ほど $dP/d\lambda$ が大きいのであるから，暗室の中で鉄を熱すると，低い温度でも，波長の長い赤ではなく，波長の短い青色に光ることになる．これらは，明らかに実験事実に反する．この，レイリー・ジーンズの公式がもつ短波長での困難を紫外破綻と呼ぶ．この公式の間違いは，調和振動子あたりの平均エネルギーを $k_B T$ と仮定したことにあるのが，後で明らかになる（式 (2.21) 参照）．長波長領域においてはこの仮定は正しいが，短波長領域においては誤りなのである．

実験と合う公式は，ウィーン (Wien) によって求められた経験則

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{C_1 \exp(-\frac{C_2}{\lambda T})}{\lambda^5} \tag{2.16}$$

である．ここで，C_1 と C_2 は定数である．輻射のエネルギーは，波長が短いほうでは指数関数的に 0 になり，波長の長いほうでは λ^{-5} で 0 になる．さらに，このウィーンの経験則からは，(1) 輻射の単位面積単位時間あたりのエネルギーは，T^4 に比例すること，(2) $dP/d\lambda$ の最大値を与える波長

は，温度に反比例すること（ウィーンの変位則），が示される．これらの予測は，実験結果とよく一致していたが，より精密な実験によると，長波長領域あるいは高温においては，ウィーンの経験則からずれてくることがわかっており，より正確な理論式が求められていた．

黒体輻射の正しい理論は1900年にプランクによって見つけられる．プランクは，調和振動子のもち得るエネルギーの値は連続でなく，振動子の振動数 $\nu = c/\lambda$ に比例する量 $h\nu$ の整数倍に限られるという量子仮説から実験を正確に再現する $dP/d\lambda$ が導けることを示したのである(4)．すなわち，

$$\boxed{E_n = nh\nu \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)} \tag{2.17}$$

ここで，比例係数 h は，

$$\boxed{\begin{aligned} h &= 6.62607755 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \\ &= 4.1356692 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV \cdot s} \end{aligned}} \tag{2.18}$$

であり，プランク定数と呼ばれている．プランク定数の次元は，エネルギー × 時間である．すると，E_{n+1} のエネルギー状態にある振動子は，

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \tag{2.19}$$

という，エネルギー量子 $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ をもった電磁波を放出して，E_n のエネルギー状態になり得るのである．

量子仮説に基づいた黒体輻射のスペクトルを導いてみよう．熱力学によると温度 T で熱平衡にある系において，エネルギー E をもつ振動子の割合は，ボルツマン係数 $\exp(-E/k_BT)$ に比例する．したがって，ある振動子が，エネルギー $E_n = nh\nu = nhc/\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ をもっている確率 $f(E_n)$ は，

(4) 実際には，長波長領域で実験とよく合うレイリー・ジーンズの公式と短波長領域でよく合うウィーンの公式の内挿式としての $dP/d\lambda$ を見つけ，その後に，量子仮説に思い当たったといわれている．

$$
\begin{aligned}
f(E_n) &= \frac{\exp(-E_n/k_BT)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-E_n/k_BT)} \\
&= \frac{\exp(-nhc/\lambda k_BT)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-nhc/\lambda k_BT)} \\
&= \frac{\exp(-nx)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-nx)} \quad (\text{ただし } x \equiv hc/\lambda k_BT) \\
&= \frac{\exp(-nx)}{1+y+y^2+y^3+\cdots} \quad (\text{ただし } y \equiv \exp(-x) < 1) \\
&= \frac{\exp(-nx)}{\dfrac{1}{1-y}} \\
&= \exp(-nhc/\lambda k_BT)(1-\exp(-hc/\lambda k_BT))
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

で与えられる．

これを使うと，振動子あたりの平均エネルギー $< E >$ は，

$$
\begin{aligned}
< E > &= \sum_{n=0}^{\infty} f(E_n)E_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nhc}{\lambda}\exp(-nhc/\lambda k_BT)(1-\exp(-hc/\lambda k_BT)) \\
&= \frac{hc}{\lambda}(1-\exp(-x))\sum_{n=0}^{\infty} n\exp(-nx) \quad (x \equiv hc/\lambda k_BT) \\
&= \frac{hc}{\lambda}(1-\exp(-x))\left\{-\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-nx)\right\} \\
&= \frac{hc}{\lambda}(1-\exp(-x))\left\{-\frac{d}{dx}\frac{1}{1-\exp(-x)}\right\} \\
&= \frac{hc}{\lambda}\frac{\exp(-x)}{1-\exp(-x)} \\
&= \frac{hc}{\lambda(\exp(hc/\lambda k_BT)-1)}
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

で与えられる．式 (2.12) の k_BT を，この $< E >$ で置き換えれば，プラン

クの公式（プランク分布）

$$\boxed{\frac{dP}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(\exp(hc/\lambda k_B T) - 1)}} \tag{2.22}$$

が得られる．プランクの公式は，長波長領域 ($\frac{hc}{\lambda} \ll k_B T$) においては，$\exp(hc/\lambda k_B T) - 1 \approx hc/\lambda k_B T$ により，

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(\exp(hc/\lambda k_B T) - 1)} \rightarrow \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4} \tag{2.23}$$

となり，レイリー・ジーンズの公式に一致し，短波長領域 ($\frac{hc}{\lambda} \gg k_B T$) においては，

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(\exp(hc/\lambda k_B T) - 1)} \rightarrow \frac{2\pi hc^2 \exp(-hc/\lambda k_B T)}{\lambda^5} \tag{2.24}$$

となり，ウィーンの経験則に一致する．

プランク定数 h と光速 c の積および，プランク定数を 2π で割った $\hbar(\equiv \frac{h}{2\pi} = 6.5821220 \times 10^{-6}\ \mathrm{eV \cdot s})$ と光速 c の積は，分子，原子，原子核，そして素粒子の物理において頻繁に出てくる定数であり，必ず覚えておくべきものである．

$$\boxed{hc = 1,240\ \mathrm{eV \cdot nm}} \tag{2.25}$$

$$\boxed{\hbar c = 197\ \mathrm{eV \cdot nm}} \tag{2.26}$$

プランクの公式には，紫外破綻はなく，全波長で積分しても発散しない．

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^\infty \frac{dP}{d\lambda} d\lambda \\
&= \frac{2\pi(k_B T)^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \\
&= \frac{2\pi(k_B T)^4}{h^3 c^2} \times \frac{\pi^4}{15} \\
&= \frac{2\pi^5}{15 h^3 c^2} \times (k_B T)^4 \\
&= 1.03 \times 10^9\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot eV^{-4}} \times (k_B T)^4
\end{aligned} \tag{2.27}$$

したがって，黒体が放出する単位面積あたりのパワー（単位時間あたりのエ

ネルギー）は，黒体の温度の 4 乗に比例する．これをステファン・ボルツマン (Stefan-Boltzmann) の公式と呼ぶ．この公式は，通常，

$$\boxed{P = \sigma T^4} \tag{2.28}$$

$$\sigma \equiv \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2} = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}} \tag{2.29}$$

と書かれることが多い．プランクの公式 (2.22) を波長 λ で微分すると，$dP/d\lambda$ は，

$$\frac{hc}{\lambda k_B T} = 5(1 - \exp(-hc/\lambda k_B t)) \tag{2.30}$$

を満たす λ において最大となる．この方程式を数値的に解くと，

$$\boxed{\lambda_{\max} = \frac{hc}{4.97 k_B T} = \frac{250\,\mathrm{eV \cdot nm}}{k_B T} = \frac{2.90}{T}\mathrm{mm}} \tag{2.31}$$

で与えられる波長において，輻射が最大になることがわかる．これが，ウィーンの経験則から導かれていた，ウィーンの変位則（$dP/d\lambda$ の最大値を与える波長は，温度に反比例する）である．

なお，プランクの公式を振動数 $\nu = c/\lambda$ を使って書き表すと，

$$\boxed{\frac{dP}{d\nu} = \frac{dP}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2(\exp(h\nu/k_B T) - 1)}} \tag{2.32}$$

となる．

黒体輻射の例

プランクの公式は，100 年以上も前に導かれたものであるが，物理学のいろいろな分野で使われる非常に役立つ公式である．図 2.3 は，地球の大気圏外における太陽光の輻射のスペクトルをプランクの公式による黒体輻射のスペクトルと比較したものである[(5)]．太陽からの輻射は，温度 5,900 K の黒体輻射でよく記述できることがわかる．これを逆に使って，物体の輻射スペ

---

(5) $dP/d\lambda$ を，地球（の大気圏外）で観測される輻射スペクトルに変換するには，$dP/d\lambda$ に，太陽の表面積と太陽を中心とし太陽と地球までの距離を半径とする球の表面積との比 $(R/r)^2 \approx 2.2 \times 10^{-5}$（$R$ は太陽の半径 $\approx 7.0 \times 10^8$m，r は太陽と地球の平均距離 $\approx 1.5 \times 10^{11}$m）をかければよい．

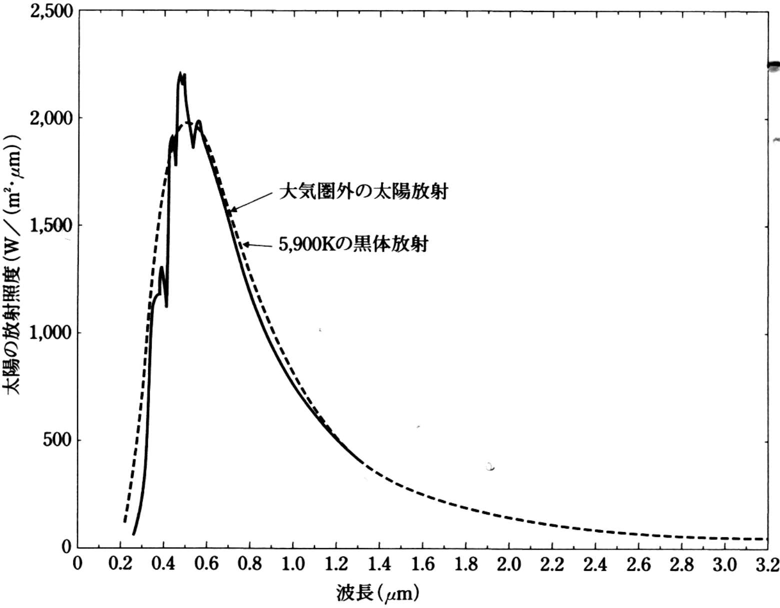


図 2.3　大気圏外において，太陽光に垂直な $1\mathrm{m}^2$ の面に注ぐ太陽エネルギー（放射照度）．波線は，5,900K の黒体輻射のスペクトルである．

クトルからその物体の温度を測定することができる．直接温度計を備え付けにいくわけにはいかない星の表面温度は，こうして測られるのである．

k_BT の大きさは，室温 $T \approx 300\,\mathrm{K}$ において，

$$k_BT = 0.02585\ \mathrm{eV} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \tag{2.33}$$

であり，太陽表面の温度約 6,000 K においても，0.5eV 程度である．

太陽から毎秒，単位面積あたり，何個のエネルギー量子が地球に届いているかを計算してみよう．地球の単位表面積あたりに，太陽から到達するエネルギーを太陽定数 (S) といい，

$$S = 1,350\ \mathrm{W/m^2} \tag{2.34}$$

である．太陽からの光が仮にすべて 500 nm（太陽スペクトルのピーク値，黄色の光）だとすると，

$$N = \frac{1,350\ \mathrm{J/s\cdot m^2}}{1.602\times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}} \div \frac{1,240\,\mathrm{eV\cdot nm}}{500\,\mathrm{nm}} = 3.4\times 10^{21}/\mathrm{s\cdot m^2} \quad (2.35)$$

これだけたくさんのエネルギー量子が毎秒地球に届いているのである．

物理学で現れる黒体輻射としてもっとも有名なものは，**宇宙背景輻射**ではないだろうか．宇宙は約 3 K の黒体輻射のスペクトルをもった電磁波で満ちている．この輻射の存在は，宇宙が膨張しており，その温度が下がり続けているとするビッグバン宇宙論を支持する強力な証拠となる．大爆発すなわちビッグバンから間もない初期の宇宙は，非常に高温であり，輻射のエネルギーと密度がきわめて高いことから，電子と陽子などの荷電粒子も原子を構成できず自由に飛び回っていた ($k_BT \gg 1\,\mathrm{eV}$)．この初期宇宙においては，荷電粒子による輻射の吸収・放出によって，輻射は熱平衡状態にあった．ビッグバンより約 10 万年ほどたち，宇宙が約 3,000 K ($k_BT \approx 0.25\,\mathrm{eV}$) 程度に冷えてくると，これまで自由に動きまわっていた電子が陽子と結合して中性原子を形成することができるようになる．その結果，輻射が相互作用することのできる荷電粒子の数が激減し，3,000 K で熱平衡状態にあった輻射が取り残されてしまった．電磁波にとって宇宙は，ほとんど透明な存在になってしまったのである．その後今日までに，宇宙は約 1,000 倍の大きさに膨張し，その結果，現在の宇宙は，約 3 K で熱平衡状態にある輻射，宇宙背景輻射で満ちているのである．宇宙という名前の空洞内に閉じ込められた輻射が，箱が大きくなるにつれてその温度が下がっていったと考えればよい．ウィーンの変位則 (2.31) によれば，宇宙背景輻射のスペクトルは，

$$\lambda_{\max} = \frac{2.90}{3}\,\mathrm{mm} \approx 1\,\mathrm{mm} \quad (2.36)$$

で与えられる波長で最大となる．この波長域の電磁波はマイクロ波と呼ばれている．

宇宙背景輻射は 1965 年，ペンチアス (Penzias) とウィルソン (Wilson) によって発見された．彼らは，波長 7.35 cm の電磁波のエネルギー密度を測定し，宇宙のどの方向からも一様にこの波長のマイクロ波が届いていることを示したのである．彼らは，スペクトルの長波長側の電磁波を捕まえたのである．1990 年，米国 NASA の COBE (Cosmic Background Explorer) 衛星

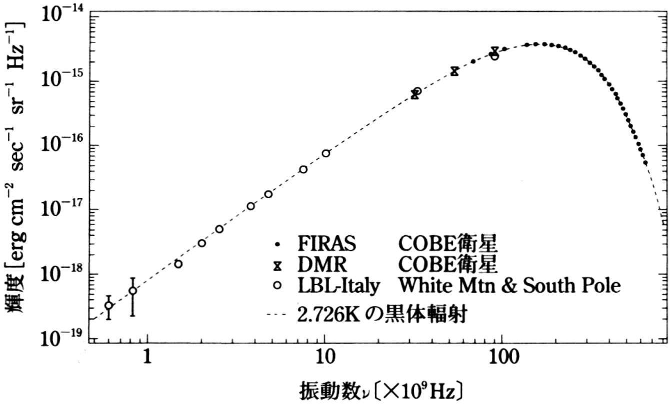


図 2.4　宇宙背景輻射のスペクトル．COBE 衛星による観測および他の観測結果を 2.726 K の黒体輻射（波線）と比較している．縦軸は，輝度という量で，輝度 (B) と $dP/d\nu$ には，$dP/d\nu = B \times \pi$ の関係がある．

は，宇宙背景輻射が，温度 2.73 K のほぼ完璧な黒体輻射のスペクトル（図 2.4）を示しており，しかも，宇宙のどの方向を向いても，10 万分の 1 の精度で，等しい温度であることを観測した．これらの実験事実は，現代物理の中心課題の 1 つである宇宙論の基礎をなす重要な発見である．

2.2　光の量子

プランクの公式の成功は，調和振動子の取り得るエネルギーが量子化されているとしたことにあった．その結果，調和振動子と相互作用して放出吸収される電磁波のエネルギーも量子化されていたのである．1905 年，アインシュタインは，この考えをさらに拡張して，電磁波自身も確定したエネルギーと運動量をもった粒子であるという説を提唱した．これを**電磁波の量子仮説**という．電磁波の量子をフォトン（photon, 光子）という．フォトンは，エネルギーと運動量を運ぶ粒子である．ただし，その質量は 0 である．フォトン 1 個のもつエネルギーは，式 (2.19) で与えられるエネルギー量子に等しい．すなわち，振動数 ν をもつ電磁波は量子化されていて，そのエネルギー E_γ は，

$$\boxed{E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}} \tag{2.37}$$

で与えられる．さらに，特殊相対性理論によると質量のない粒子のエネルギー (E) と運動量 (p) の間には

$$E = pc \tag{2.38}$$

という関係があるので，フォトンは，

$$\boxed{p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}} \tag{2.39}$$

という運動量をもっていることになる．たとえば，可視光の波長は，400 nm から 700 nm であるから，可視光のフォトンは，

$$\begin{aligned} E &= \frac{hc}{\lambda} \\ &= 1,240\ \mathrm{eV \cdot nm/(400\text{–}700\,nm)} \\ &= 3.1\text{–}1.8\ \mathrm{eV} \end{aligned} \tag{2.40}$$

で与えられるエネルギーをもっているのである．前節で紹介した宇宙背景輻射もまたフォトンの集まりである．宇宙背景輻射のエネルギー密度は，$2.7 \times 10^5\ \mathrm{eV \cdot m^{-3}}$ であり，2.73 K のプランク分布をもつ輻射の平均エネルギーは，6.4×10^{-4} eV で与えられるので，宇宙背景輻射のフォトンの数密度は，$4.2 \times 10^8\ \mathrm{m^{-3}}$ となる．宇宙は，これら宇宙背景輻射のフォトンで満ちているのである．

光の粒子としての性質を裏づける現象に光電効果がある．これは，金属の表面に光をあてると，電子が飛び出してくる現象であり，実験によって，次のようなことがわかっている．(1) 飛び出してくる電子の数は，光の強度に比例する．しかし，(2) 出てくる電子の最大エネルギーは，光の強度によらず，光の振動数とともに増大する．光が古典的な波であるならば，エネルギーは振幅の 2 乗に比例するから，振動数にかかわらず，振幅の大きな光を当てれば，金属中の電子にたくさんのエネルギーを与えることになり，その結果としてエネルギーの高い電子が飛び出してくるはずである．が，実際に起こっている現象は，フォトン (γ) と原子中の電子との電磁相互作用によ

る

$$\gamma + (\text{原子中の電子 } e^-) \to e^- + (\text{電子の 1 個少ない原子}) \tag{2.41}$$

という衝突過程である．金属中において（外殻）電子は，原子から原子へ自由に動くことができる．ただし，金属中に束縛されているので，その力を振り切って飛び出していくためにはある一定のエネルギーが必要である．このエネルギーを仕事関数 (W) と呼んでいる．よって，もし，入射したフォトンのエネルギー $h\nu$ が，金属の仕事関数よりも大きければ，電子は，運動エネルギー

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W = h\left(\nu - \frac{W}{h}\right) \tag{2.42}$$

をもって飛び出すことができる．逆に，フォトンの振動数が W/h より小さければ，どんなにたくさんのフォトンを金属に当てても電子は出てこれない．フォトンの振動数が W/h より大きければ，電子は入射するフォトンの数だけ飛び出してくるので，飛び出してくる電子の総数は，光の強度に比例するのである．仕事関数 W の値は，およそ数電子ボルトで，たとえばアルミでは 4.3 eV，金では 5.1 eV である．

光は古典電磁気学の方程式であるマクスウェル方程式に従う波であったはずなのに，実はフォトンという粒子の集まりとしてもふるまうという．それでは，光のもつ**波動性**と**粒子性**をどう理解したらよいのだろうか？　波のもつ重要な性質に干渉がある．図 2.5 のように，光源から出た光を 2 つのスリットに通すとスクリーン上に干渉縞をつくる．**ヤング (Young) の二重スリットの実験**と呼ばれているものである．スクリーン上の光は，スリット S_1 と S_2 を通ってきた光の重ね合わせである．光の波は，S_1 と S_2 から同じ位相をもって出ていくので，スクリーン上の点 P と，S_1 および S_2 との距離の差 $\Delta = |S_1P - S_2P|$ が，光の波長 λ の整数倍のときに，強め合って明るくなり，$\Delta = (n + \frac{1}{2})\lambda$（$n$ は整数）のときには，打ち消し合って暗くなる．この干渉パターンこそが，光が波であることの証拠である．

では，光源から出る光を弱くして，フォトンが 1 個ずつ出ていくようにしたら何が起こるのであろうか？　フォトンは，2 つのスリットのうちのど

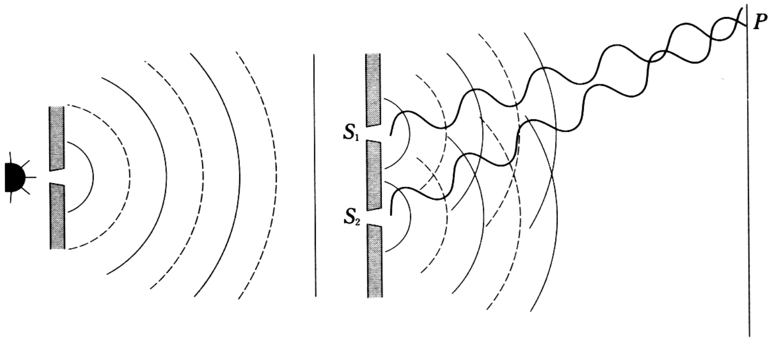


図 2.5 ヤングの二重スリットによる光の干渉実験

ちらかを通過して，スクリーンに到達するはずである．実際，実験をするとスクリーンの点が，ポツリポツリと1つずつ光るのである．光の粒子フォトンが，どちらかのスリットを通過してスクリーンに当たったと考えることができる．しばらくして，このフォトンが到達した点の数が増えてくると，強い光を使って実験したときと同じような干渉パターンが見えてくる．すなわち，$\Delta = n\lambda$ に対応するスクリーンの部分には，フォトンがたくさん当たり，$\Delta = (n + \frac{1}{2})\lambda$ に対応する部分にはフォトンがあまり到達しないのである．したがって，フォトンの当たった点を記録していくと，しだいに波の重ね合わせによる干渉縞と同一の干渉パターンが出現するのである．これを，フォトンがスクリーンのある点に到達するという「確率」に干渉縞ができていると考える．光の量子フォトンのもつ波動性は，フォトンの運動が，確率を計算するもとになる波，これを**波動関数**と呼ぶ，によって記述されるからだと考えることにしよう．フォトンがスクリーン上の点に到達するという物理的な事象が起こる確率 P は，この波動関数 ψ（ψ は複素関数）の絶対値の2乗で表すことができる：

$$P = |\psi|^2 \tag{2.43}$$

この二重スリットの実験のように，ある事象（スクリーン上のある点にフォトンが到達すること）が，1つだけの過程でなく，2つの過程で起こり得る（フォトンが，スリット S_1 とスリット S_2 のいずれかを通過してスクリーン

に到達する）とき，この事象の起こる確率 P は，1つ1つの過程に対応する波動関数の和 $(\psi_1 + \psi_2)$ の 2 乗で書かれる：

$$P = |\psi_1 + \psi_2|^2 \tag{2.44}$$

ここで，ψ_1 と ψ_2 は複素関数であることに注意して，ψ_1 と ψ_2 の位相の差を δ とすると，P は，

$$P = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + (\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) \tag{2.45}$$

$$= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1||\psi_2| \cos\delta \tag{2.46}$$

と表される．ここで，ψ_1^*, ψ_2^* は，それぞれ ψ_1, ψ_2 の複素共役である．結果は，$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ とは，$2|\psi_1||\psi_2| \cos\delta$ の項だけ異なっている．この位相のずれが，波の干渉と同じように，フォトンの到達する位置に干渉縞をつくり出すのである．

ところでもし，1回1回フォトンがどちらのスリットを通るかを確かめたらどうなるであろうか．この場合には，フォトンがどちらのスリットを通るかが確定しているので，フォトンがスクリーン上のある点に到達する確率は，

$$P = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \tag{2.47}$$

となり，干渉は起こらない．なぜ，こうなるのか？　それは，フォトンがどちらのスリットを通るかを確かめるための手段，この場合たとえば，1回1回他方のスリットを閉じるといった行為によって，波動関数が干渉を起こさないようにしてしまったからである．波動関数は，フォトンがどちらのスリットも通る可能性があるという状態にしておいて初めて，干渉を起こすのである．両方のスリットを開けておかなければ干渉は起こらない．これが，フォトンの従う物理法則である．

2.3　ド・ブロイ波長

電磁波が波動性と粒子性の両方をもち合わせているのなら，いままで粒子

と考えてきた電子にも波動性があるのではないだろうか．1924年，ド・ブロイ (de Broglie) は，すべての粒子は，波動性をもっており，その波長は，粒子のもつ運動量を p とすると

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \tag{2.48}$$

で与えられるという**物質波**（**ド・ブロイ波**）の仮説を提案した．この式は，フォトンの運動量を与える式 (2.39) と同じ形をしていることに注意しよう．この波長を**ド・ブロイ波長**と呼ぶ．この仮説の正しさは，電子ビーム（多数の電子を飛ばして束にしたもの）を使ったヤングの二重スリットの実験で確かめることができる．電子ビームを2つのスリットで分け，スクリーンとして蛍光板を用いると，電子が当たった点が光る．これを写真に撮ると，光の二重スリットの実験同様，干渉縞が観測される．すなわち，電子ビームは波としてふるまうのである．さらに，電子ビームの強度を弱くして，電子が1個ずつ飛び出すようにしてやると，スクリーン上では電子1個が当たった点だけがポツリポツリと光るが，やがて，ビーム強度が強いときと同様の干渉パターンが観測されるようになる．このような干渉現象は，電子を粒子として扱う古典力学では理解できない．フォトン同様，電子の運動も波動関数で記述され，その波長が，ド・ブロイ波長に等しいと考えて初めて説明できる．

2.4 結合定数とド・ブロイ波長

特殊相対性理論によると，粒子のもつ全エネルギーは，

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \tag{2.49}$$

で与えられる．質量エネルギー mc^2 に比べて，pc（したがって，E 自身）が十分に大きいときには，

$$E \approx pc \tag{2.50}$$

が成り立つ．このとき，粒子のエネルギーとド・ブロイ波長の積は，

$$E \times \lambda = pc \times \frac{h}{p} = hc = \hbar c \times 2\pi \tag{2.51}$$

であり，すなわち，

$$\frac{E \times \lambda}{2\pi} = \hbar c = 197 \text{ eV} \cdot \text{nm} \tag{2.52}$$

が成り立つ．第 1 章で，$197\,\text{eV} \cdot \text{nm}$ は，フェルミオンの間で交換されるゲージボゾンのエネルギーと波長の積を 2π で割ったものであると書いたが，実は，この関係式は，エネルギーが十分に大きいときには，すべての粒子について成り立つ関係式であったのである（もちろん，フォトンのように質量 0 の粒子については，すべてのエネルギーで厳密に成り立つ）．1.3 節で導入した「(エネルギー)×(長さ) という次元をもつ，相互作用の種類によらない普遍的物理定数 $197 \text{ eV} \cdot \text{nm}$」とは，プランク定数と光速の積（を 2π で割ったもの）であったのである．1.3 節では，電磁相互作用の結合定数 α は，$\alpha \equiv (\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}) \div (197 \text{ eV} \cdot \text{nm})$ と定義されたが，ここで，あらためて，

$$\boxed{\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}} \tag{2.53}$$

と定義することができる．

2.5　ボーアの原子模型

古典力学で理解できない性質としてよく知られているものに，原子中の電子の振る舞いがある．原子中の電子は，原子核のクーロンポテンシャルによって，原子中に束縛されている．これを古典的に考えると，電子は原子核のまわりを円運動しているわけで，つねに加速度を受けている．電磁気学に従えば，加速されている電子は電磁波を放出するはずである．が，原子にはいくつかの定常状態があり，定常状態では原子は電磁波を出さない．ボーアの原子模型は，この事実を説明することができる．以下，簡単のために，水素原子を考える．電子は，陽子からのクーロン力で円運動をしていると考えると，電子のもつエネルギー E は，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和として，

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{2.54}$$

で表される．遠心力とクーロン力がつりあっているはずだから，

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{2.55}$$

が成り立ち，方程式 (2.54) と (2.55) より，

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \tag{2.56}$$

が得られる．電子は，ド・ブロイ波長で表される波動性をもっているから，電子が安定した円運動をするためには，その波長の整数倍が円周長と等しいことが必要と考えられる．さもなければ，電子波は干渉によっていずれは消えてしまうからである．

$$2\pi r = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{2.57}$$

ここで，ド・ブロイ波長は，$\lambda = h/p = h/mv$ で与えられる．この条件は，ボーア・ゾンマーフェルト (Bohr-Sommerfeld) の量子化条件と呼ばれている．さらに，式 (2.57) は，次のように書き換えることができる．

$$L = pr = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{n\lambda}{2\pi} = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \tag{2.58}$$

これは，電子の角運動量が，$\hbar$ の整数倍に限られるという，**角運動の量子化**を意味しており，ボーアの量子化条件と呼ばれている．プランク定数は，(エネルギー) × (時間) の次元をもつ量であるが，これはまた，角運動量の次元でもあることに注意しよう：

$$\begin{aligned}\text{エネルギー} \times \text{時間} &= (\text{質量} \times \text{速度}^2) \times \text{時間} \\ &= \text{質量} \times \text{速度} \times \text{長さ} \\ &= \text{運動量} \times \text{長さ} \\ &= \text{角運動量}\end{aligned} \tag{2.59}$$

$p = mv$ と量子化条件 (2.58) から得られる

$$v = \frac{n\hbar}{mr} \tag{2.60}$$

を，式 (2.55) に代入して，r について解けば

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \times n^2 = \frac{\hbar}{mc}\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar c}{e^2} \times n^2 = \frac{\hbar}{mc} \times \frac{1}{\alpha} \times n^2 \tag{2.61}$$

を得る．電子の最小軌道半径（ボーア半径）は，$n = 1$ のときで，

$$a_0 = \frac{\hbar}{mc\alpha} = \frac{\hbar c}{mc^2\alpha} \approx \frac{197\,\mathrm{eV\cdot nm}}{(511\ \mathrm{keV})(1/137)} \approx 0.053\,\mathrm{nm} \tag{2.62}$$

である．電子のエネルギーも量子化されて，n を正の整数として，

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{mc\alpha}{\hbar n^2} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{2n^2} \tag{2.63}$$

となり，もっともエネルギーの低い状態（基底状態）のエネルギーは，

$$E_1 = -\frac{(1/137)^2(511\ \mathrm{keV})}{2} \approx -13.6\ \mathrm{eV} \tag{2.64}$$

となる．さらに，電子の速度もまた量子化されている．

$$v = \frac{n\hbar}{m(\hbar n^2/mc\alpha)} = \frac{\alpha c}{n} \tag{2.65}$$

したがって，水素原子の基底状態の電子は，

$$v_1 = \alpha c \approx \frac{c}{137} \tag{2.66}$$

すなわち，光速の 1% 程度の速度しかもっていない(6)．

2.6　波束とその運動

電子ビームによる二重スリットの実験から，大きさをもたない粒子である電子も，ド・ブロイ波長で表される波動性を有していることが明らかになった．この波動性は，確率を計算するもとになる波である波動関数によって表されている．ではこの波動関数は，どのような運動方程式を満たしている

(6) 水素原子中の電子の運動を相対論的に扱わなくてもよい理由はここにある．

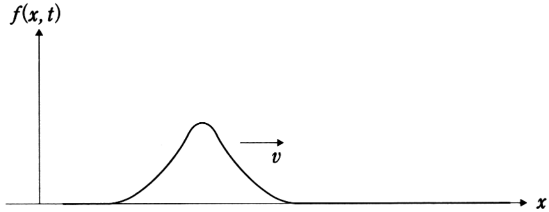


図 **2.6** 1 次元の波

のであろうか？　その運動方程式こそが，電子のもつ波動性を記述できる力学，量子力学の方程式である．もちろん，電子の波動性は古典力学で説明することはできないのであるから，この方程式も古典力学から導き出すことはできない．しかしながら，電子の運動を波で表現することからその方程式を推測することができる．以下では，電子あるいは質点を空間的に局在した波である**波束**で表現し，その運動を考えることによって，ド・ブロイ波の波動関数が従う方程式であるシュレーディンガー (Schrödinger) **方程式**を導出する．

その前に，波の運動について簡単に説明しておくことにしよう．図 2.6 に示したように，形を崩さず x 軸上を一定速度 v で伝わっていく 1 次元の波を考える．関数 $f(x,t)$ が，座標 x，時刻 t における変位を表し，$t=0$ において，波の形が $g(x)$ であったとする：

$$g(x) \equiv f(x,0) \tag{2.67}$$

この波は，形を崩さずに伝わっていく波であるから，

$$f(x,t) = f(x-vt,0) = g(x-vt) \tag{2.68}$$

が成り立つ．すなわち，関数 $f(x,t)$ が，$(x-vt)$ のみの関数として表されるとき，$f(x,t)$ は，速度 v で x 方向に，形を崩さずに伝わっていく波を表している．式 (2.68) から，$f(x,t)$ が，方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{2.69}$$

の解であることを容易に示すことができる．この方程式を（1 次元の）波動

方程式と呼ぶ（すでに，黒体輻射のスペクトルを得るために，電場と磁場が，3 次元の波動方程式 (2.1) を満たすことを使った）．正弦波は，形を崩さずに伝わる波の典型である：

$$f(x,t) = A\cos\{k(x-vt)+\delta\} \tag{2.70}$$

ここで，k を波数と呼ぶ．δ は，初期条件で決まる定数である．$f(x+2\pi/k, t) = f(x,t)$ だから，波長 λ とは，

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{2.71}$$

の関係にある．同様にして，波の 1 周期 T は，

$$T = \frac{2\pi}{kv} \tag{2.72}$$

であり，したがって，周波数（振動数）ν と角振動数 ω は，それぞれ，

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda}, \tag{2.73}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{v}{\lambda} = kv \tag{2.74}$$

である．波数と角振動数を使うと，式 (2.70) は，

$$f(x,t) = A\cos(kx-\omega t+\delta) \tag{2.75}$$

となる．もちろん，cos のかわりに，sin を使っても正弦波を表すことができる．さらに，正弦波は，次のように複素数で表示することができる．

$$\begin{aligned} f(x,t) &= A\{\cos(kx-\omega t+\delta)+i\sin(kx-\omega t+\delta)\} \\ &= Ae^{i(kx-\omega t+\delta)} \\ &= Ae^{i\delta}e^{i(kx-\omega t)} \\ &= Ce^{i(kx-\omega t)} \end{aligned} \tag{2.76}$$

$C = Ae^{i\delta}$ は，複素振幅と呼ばれる．

正弦波は，空間に一様に広がっている波であるが，ある空間領域に局在している波である波束も，正弦波の重ね合わせとして表すことができることを以下で示そう．まず，簡単のために $t=0$ とする：

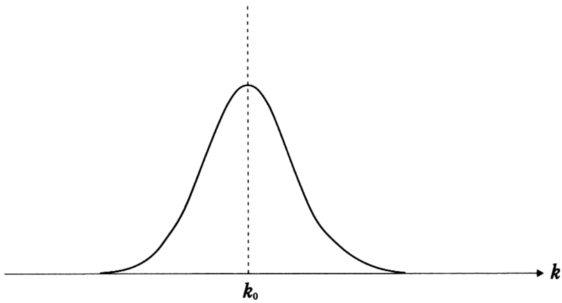


図 **2.7** 波数 k のガウス分布

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk \tag{2.77}$$

ここで，関数 $g(k)$ は，波数 k の分布関数であり，k 座標系において局在した関数，たとえば，ガウス関数，

$$g(k) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\{-\alpha(k-k_0)^2\} \tag{2.78}$$

を選ぶ（図 2.7 参照）．ここで，α は，正の実定数である．式 (2.77) の積分を実行すると，

$$\begin{aligned}
I &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\alpha(k-k_0)^2 + ikx\} dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha k'^2) \exp(ik'x) \exp(ik_0x) dk' \\
&= \exp(ik_0x) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha k'^2)(\cos k'x + i \sin k'x) dk' \\
&= \exp(ik_0x) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha k'^2) \cos(k'x) dk' \\
&= \exp(ik_0x) \times \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{2.79}$$

ここで，$k' = k - k_0$，$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha k'^2) \sin(k'x) dk' = 0$ と，$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha k'^2) \cdot \cos(k'x) dk' = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp(-\frac{x^2}{4\alpha})$ を使った．したがって，

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\alpha)^{1/4}} e^{ik_0x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \tag{2.80}$$

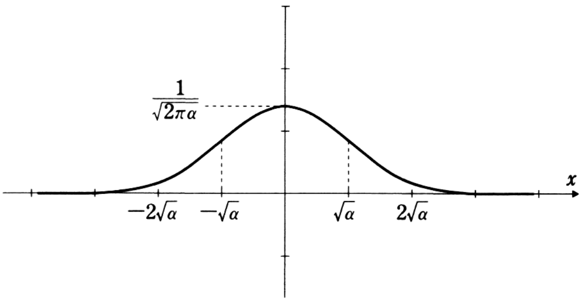


図 2.8　$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$ で表される波束の形

が得られる．

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} \tag{2.81}$$

であるから，$|\psi(x)|^2$ は，$x = 0$ でピークをもち，このピークのまわりに局在した波束を表すことがわかる（この関数形もまたガウス関数である）．図 2.8 からわかるように，α の値が小さいときは，幅の狭い波束，逆に，α の値が大きいときは，幅の広い波束となる．$|\psi(x)|^2$ の幅を定量的に示すために，次のように定義した標準偏差 σ_x を計算しよう．

$$\begin{aligned}
\sigma_x &\equiv \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|\psi(x)|^2 dx} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) dx} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \times \alpha\sqrt{2\pi\alpha}} \\
&= \sqrt{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

ここで，β を正の実定数とするとき，$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta x^2)dx = \sqrt{\pi/\beta}$ であることと，$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-\beta x^2)dx = \frac{\partial}{\partial(-\beta)}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta x^2)dx$ を用いた．以下，波束 $|\psi(x)|^2$ の幅を，$\sigma_x = \sqrt{\alpha}$ で表す．

粒子の波動性をこの波束で表現することにしよう．すなわち，複素関数 $\psi(x)$ は，粒子の波動関数であり，時刻 $t = 0$ に粒子が座標 x に存在する，

単位長さあたりの確率は，

$$\frac{dP}{dx} = |\psi(x)|^2 \tag{2.83}$$

で与えられるものとするのである．粒子を空間（この場合は 1 次元の空間）のどこかに見つける確率は 1 であるから，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \tag{2.84}$$

である．

$\psi(x)$ は，$g(k)$ という波数分布をもった正弦波 e^{ikx} の集まりを重ね合わせることによってできた波束であるが，逆に，$\psi(x)$ が与えられると，次の式によって，$g(k)$ を導き出すことができる[7]．

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx \tag{2.85}$$

さらに，

$$|g(k)|^2 = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \exp\{-2\alpha(k-k_0)^2\} \tag{2.86}$$

であるから，$|g(k)|^2$ は，k_0 でピークをもち，その標準偏差 σ_k は，

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (k-k_0)^2 |g(k)|^2 dk} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \end{aligned} \tag{2.87}$$

で与えられる．式 (2.82) と式 (2.87) とから，波束の幅と波数分布（の 2 乗）の幅とには，

$$\boxed{\sigma_x \sigma_k = \sqrt{\alpha}\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2}} \tag{2.88}$$

の関係があることがわかる．すなわち，x 座標で狭い領域に局在している波は k 座標では広がっており，逆に，x 座標で広がっている波は k 座標では

(7) $g(k)$ と $\psi(x)$ は，互いのフーリエ変換となっている．

局在している．σ_x と σ_k を同時に小さくすることはできない．これは，波束の一般的な性質であるが，量子力学において重要な意味をもつことが次の節でわかる．

さて，$t=0$ で $x=0$ のまわりに局在している，粒子の波束 $|\psi(x)|^2$ は，時間とともにどのように伝搬していくのであろうか？　それは，波束を形成している1つ1つの正弦波がどのように伝搬していくかによっている．1つ1つの正弦波は，式 (2.76) のように伝搬していくから，式 (2.77) と同様に，

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(k)\exp\{i(kx-\omega t)\}dk \tag{2.89}$$

と表すことができる．考えている正弦波が真空中の光（電磁波）であるならば，

$$\omega=kc \tag{2.90}$$

が成り立つから，

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(k)\exp\{ik(x-ct)\}dk=\psi(x-ct,0) \tag{2.91}$$

となる．これは，式 (2.68) 同様，$t=0$ における形を保ったまま光速 c で伝わっていく波である．つまり，真空中の光による波束は，形を崩すことなく光速で伝搬する．が，いま求めようとしているのは，粒子の運動に対応した波束の伝搬である．このとき，それぞれの平面波について，$\omega=kc$ が成り立つ保証はなく，一般に ω は k の関数である．

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(k)\exp\{i(kx-\omega(k)t)\}dk \tag{2.92}$$

ここでも，式 (2.78) で与えられる k_0 でピークをもつ $g(k)$ を考えると，式 (2.92) の積分を実行するとき，$\omega(k)$ を k_0 の近傍で展開して近似することができる．

$$\omega(k)\approx\omega(k_0)+(k-k_0)\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}+\frac{1}{2}(k-k_0)^2\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k=k_0}+\cdots \tag{2.93}$$

$\omega(k)$ は，k のなめらかな関数と仮定し，$(k-k_0)$ の2次の項までを考えることにする．

$$\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} = v_g, \tag{2.94}$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k=k_0} = \beta \tag{2.95}$$

とおくことにすると，$k' = k - k_0$ として，式 (2.92) は，

$$\begin{aligned}
&\psi(x,t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\{i(k_0 x - \omega(k_0)t)\} \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha k'^2) \exp\{ik'(x - v_g t)\} \exp(-ik'^2 \beta t) dk' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\{i(k_0 x - \omega(k_0)t)\} \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{ik'(x - v_g t)\} \exp\{-(\alpha + i\beta t)k'^2\} dk'
\end{aligned} \tag{2.96}$$

これは，式 (2.80) で x を $x - v_g t$ に，α を $\alpha + i\beta t$ に置き換えたものと等価であるから，

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) =& \frac{1}{\{2\pi(\alpha + i\beta t)\}^{1/4}} \exp\{i(k_0 x - \omega(k_0)t)\} \\
&\cdot \exp\{-(x - v_g t)^2 / 4(\alpha + i\beta t)\}
\end{aligned} \tag{2.97}$$

となり，その絶対値の 2 乗は，

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}(1 + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2})^{1/4}} \exp\left\{-\frac{(x - v_g t)^2}{2\alpha(1 + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2})}\right\} \tag{2.98}$$

となる．これは，ピークが v_g で伝搬する波束を表している．この波束の進む速度 v_g を群速度 (group velocity) と呼ぶ．ただし，波束の形は一定ではなく，時間とともにその幅が広がっていく．

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\alpha\left(1 + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2}\right)} \tag{2.99}$$

幅が時間とともに広がっていく割合は，$(1 + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2})^{1/2}$ であるから，$t = 0$ において空間的に大きく広がっていた（α の大きな）波束ほど，ゆっくりと広がることになる．

$|\psi(x,t)|^2 dx$ は，粒子が時刻 t に，x から $x+dx$ に存在する確率を表しているから，この波束の形は $t=0$ で $x=0$ に局在していた粒子が，$x=0$ から遠く離れた場所でも見つかる確率が時間とともに増えてくることを意味している．

2.7 波動関数と不確定性原理

式 (2.89) の波束が，質量 m，運動量 p，運動エネルギー $p^2/2m$ をもつ粒子の波動関数であるためには，群速度 v_g と粒子の速度が等しいことが必要である：

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{p}{m} \tag{2.100}$$

さらに，振動数 ν の調和振動子のもつエネルギーが，$h\nu = \hbar 2\pi\nu = \hbar\omega$ であることから類推して，粒子の運動エネルギーと波束の角振動数にも

$$E = \hbar\omega \tag{2.101}$$

が成り立つとすると，

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 \tag{2.102}$$

式 (2.100) と式 (2.102) を比べると，

$$k = \frac{p}{\hbar} \tag{2.103}$$

とおけば（$\frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}$ となって）両方の式が同時に成り立つことがわかる．$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ であるから，この式は，ド・ブロイ波長の式 $\lambda = h/p$ に他ならない．

式 (2.89) の波束を，粒子の運動量とエネルギーを使って書き直すと，

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(p/\hbar)\exp\{i(px-Et)/\hbar\}dp/\hbar \tag{2.104}$$

となる．いま，$E = p^2/2m$ だから，

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(p/\hbar)E\exp\{i(px-Et)/\hbar\}dp/\hbar \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(p/\hbar)\frac{p^2}{2m}\exp\{i(px-Et)/\hbar\}dp/\hbar \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{2.105}$$

したがって，この波束，すなわち，自由粒子の波動関数は，微分方程式

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}} \tag{2.106}$$

の解である．この方程式を，自由粒子に対する 1 次元のシュレーディンガー方程式という．量子力学における運動方程式である．自由粒子の量子力学的運動は，この方程式を解いて得られる波動関数によって記述される．式 (2.105) の変形をもう一度観察すると，エネルギー E は微分演算子 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ を波動関数 $\psi(x,t)$ に作用させたことによって現れ，運動量 p は，微分演算子 $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ を波動関数 $\psi(x,t)$ に作用させることに対応しているのがわかる．すなわち，シュレーディンガー方程式は，エネルギーと運動量の関係式，$E = p^2/2m$ において，エネルギーと運動量をそれぞれ次のような演算子に置き換えることによって導かれることがわかる．

$$\begin{aligned} E &\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \\ p &\to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.107}$$

古典力学から量子力学への移行（この操作を一般に「量子化」と呼ぶ）は，力学変数であるエネルギーや運動量を波動関数に作用する演算子とみなすことによって行われるのである．

質量 m の自由粒子に対する 3 次元のシュレーディンガー方程式は，1 次元の場合から容易に予想できるように，粒子のエネルギーと運動量の関係

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \tag{2.108}$$

において，

$$\boxed{\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \\ p_x &\rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \\ p_y &\rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \\ p_z &\rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}} \tag{2.109}$$

の置き換えを行うことによって得られる.

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t} = &-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,y,z,t)}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,y,z,t)}{\partial y^2} \\ &-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,y,z,t)}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{2.110}$$

すなわち,

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,z,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z,t)} \tag{2.111}$$

で与えられる.

波束の重要な性質の 1 つに $\sigma_x\sigma_k = 1/2$ があった. 量子力学においては, $p = \hbar k$ であるから, $\sigma_p = \hbar\sigma_k$ である. したがって,

$$\sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2} \tag{2.112}$$

が成り立つ. σ_x は, 粒子が x から $x + dx$ に存在する確率を表す波の広がり, σ_p は, 粒子の運動量が p から $p + dp$ の間にある確率を表す波の広がりであるから, それぞれ粒子の位置の不確定性 (Δx) と運動量の不確定 (Δp) とみなすことができる. 実は, この粒子の位置と運動量の不確定性の積は, ガウス関数の波束のときに最小で, その他の関数に基づく波束のときには, $\hbar/2$ よりも大きい. すなわち, Δx と Δp との間には, ハイゼンベルグ (Heisenberg) の**不確定性原理**

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}} \tag{2.113}$$

が成り立つ．古典力学においては，粒子の位置と運動量は，独立に完全に決定することができたが，量子力学の世界においては，両者を同時に知ることのできる精度には基本的な限界が存在するのである．

$t=0$ において空間的に広がっていた波束ほどゆっくりとその幅が広がるが，これを粒子に当てはめてみると，$t=0$ において Δx が小さい粒子は，不確定性原理から Δp が大きい．したがって，粒子の速度の不確定性も大きい．速度がばらついているわけである．その結果，時間がたつと，どこの位置にいるかという不確定性が大きくなり，存在確率を表す波動関数（とその 2 乗）が，空間的に広がってしまうのである．

また，$E=p^2/2m$ より，$\Delta E = p\Delta p/m$，さらに，$p=mv=m\Delta x/\Delta t$ であるから，

$$\Delta E \Delta t = \frac{p\Delta p}{m} \cdot \frac{m}{p}\Delta x = \Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{2.114}$$

となり，粒子の位置 x が Δx だけ変化するのにかかる時間 Δt と粒子のエネルギーの不確定性 ΔE との間には以下のような関係が成り立っている．

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}} \tag{2.115}$$

2.8　スピン

古典力学では，剛体（たとえば鉄の玉）は，よく知られているように，2 種類の角運動量をもち得る．剛体の重心の運動に関する**軌道角運動量** ($L = r \times p$) と，重心のまわりの自転（スピン）による角運動量である．2.5 節で述べたように，原子中の電子の軌道角運動量は量子化されていて，その値は $n\hbar$ $(n=0,1,2,\cdots)$ である．そして，電子にも**スピン角運動量**が存在する．剛体のスピン角運動量は，剛体各部の重心まわりの軌道角運動量の和として計算される．しかしながら，電子は，剛体と異なり，大きさのない素粒子で

あるから，そのスピン角運動量は，電子固有の性質である．一般に，素粒子の空間運動とは無関係な固有の性質を内部量子数と呼ぶが，スピン角運動量はその典型である．第1章で述べた素粒子の分類，フェルミオンとゲージボゾンは，これらの粒子のもつスピン角運動量 S の違いによっている．物質の構成粒子であるフェルミオン（クォークとレプトン）はスピンの大きさが $S = \frac{\hbar}{2}$ である．一方，ゲージボゾンは，$S = 1\hbar$ をもつ．

一般に，半奇数 $\times\hbar$，すなわち，$\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \cdots$ のスピン（角運動量）をもつ粒子をフェルミオン，整数 $\times\hbar$，すなわち，$0, \hbar, 2\hbar, \cdots$ のスピンをもつ粒子をボゾンという．通常，$\hbar$ を省略して，「電子のスピンは $\frac{1}{2}$ である」「ゲージボゾンはスピン1の粒子である」などという．

スピン角運動量という内部量子数は，量子力学と次章で説明する特殊相対性理論の融合(8)によってはじめて理解できる非常に重要な粒子の性質であるが，ここでは，スピンという粒子固有の量子数が存在しているということを指摘するだけにとどめておく．

(8) 電子のスピンはディラック方程式から導出される．

第 3 章
粒子の生成・消滅

第 1 章で述べたように，われわれが日常目にする物質は，u クォーク，d クォーク，電子といった第 1 世代の素粒子でできている．それでは，第 2，第 3 世代の素粒子はどのようにして見つかったのであろうか？　質量が金原子と同じくらいあるもっとも重い素粒子 t クォークは，いったいどのようにして，その存在が明らかになったのであろうか？　この問いに対する答えは，特殊相対性理論から導かれる質量とエネルギーの関係式 $E = mc^2$ にある．前章で解説した量子力学を特殊相対性理論と矛盾のないように発展させると，すべての素粒子には，その電荷と符号が反対で，絶対値の等しい電荷をもつ**反粒子**が存在することが導ける．たとえば電子には，正の電荷をもった**陽電子**が存在する．陽子には負の電荷をもった**反陽子**が存在する．この反粒子と粒子が出会うと両者のエネルギーの和に等しいエネルギーを有するゲージボゾンになる．このゲージボゾンはその後再び，粒子と反粒子の対になることができる．このとき，終状態にできた粒子・反粒子の対は，かならずしも始めの対と同じである必要はなく，他の種類の粒子・反粒子対ができてもよい．このようにして，たとえば，電子と陽電子を衝突させて t クォークと反 t クォークをつくることができる．したがって，粒子の生成消滅を理解するには，特殊相対性理論の知識が不可欠である．さらに，素粒子物理の実験においては，多くの場合，光速に非常に近い速度をもっている粒子の運動を取り扱い，そこでは，相対論的効果が重要な役割を果たしている．

本章では，まず，異なる 2 つの座標系における空間・時間座標の間の関係式である**ローレンツ (Lorentz) 変換**を導き，次に，相対論的量子力学の方程式である**ディラック (Dirac) 方程式**を紹介する．最後に，もっとも重いフ

ェルミオン，t クォークの発見について説明する．

3.1　ローレンツ変換

1905 年，アインシュタインによって定式化された特殊相対性理論は，次の 2 つの基本原理を出発点としている．

1. **相対性原理**：物理法則は，すべての慣性系において同じ形をしている．
2. **光速不変の原理**：真空中の光の速度 (c) は，どの慣性系で見ても同じであり，光源の運動によらない．

ここで，**慣性系**とは，ニュートンの**第 1 法則**（**慣性の法則**），力を受けていない質点は等速度運動を続ける，が成り立つ座標系のことである．ある慣性系に対して相対的に等速度で運動している座標系もまた慣性系である．

2 つの慣性系 $S(t,x,y,z)$ と $S'(t',x',y',z')$ を考えよう．図 3.1 に示したように，S' 系は，S 系に対して，x 軸の正の方向に $v(>0)$ で等速度運動をしている．ここで t と t' は，それぞれ S 系と S' 系に備え付けられた時計が刻む時刻である．

もちろん，ニュートン力学においては，$t'=t$ が厳密に成り立っている．すなわち，2 つの座標系において時間は共通である．さらに，S 系と S' 系の空間座標は，ガリレイ (Galilei) 変換

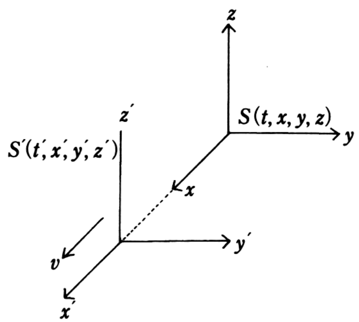


図 3.1　慣性系 S 系に対して，x 軸の正の方向に $v(>0)$ で等速度運動をしている，S' 系もまた慣性系である．

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z \end{aligned}} \tag{3.1}$$

によって関係づけられる．しかしながら，光速不変の原理を受け入れると，そうはいかないのである．いま，簡単のために $t = t' = 0$ において，2つの系の原点が一致していたとする．このとき，座標原点より光を発射したとしよう．光が，S 系の点 (x, y, z) に，時刻 t に到達したとする．したがって，

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \tag{3.2}$$

が成り立つ．この物理現象を，S' 系で観測したとしよう．$t' = 0$ に原点から発射された光が，時刻 t' に点 (x', y', z') に到達したと観測されたとする．光の速度は，S' 系においても c であるから，

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \tag{3.3}$$

が成り立つ．ここですぐに明らかになることは，S' 系は，S 系に対して相対的に運動しているのだから，これらの2つの式が両立するためには，$t' = t$ ではあり得ないということである．光速不変の原理を受け入れると，2つの慣性系で共通の時間が使えなくなるのである．時間は，もはや2つの座標系に共通ではなく，それぞれの座標系に固有の時間を使わなくてはならない．

S 系と S' 系の（空間と時間両方の）座標間の関係を求めてみよう．2つの座標系の相対運動は，x 軸に平行なので，それと垂直な y, z 方向は式 (3.1) 同様，

$$y' = y, \quad z' = z$$

が成り立つであろう．すると，x' と t' は，x と t の関数として求められるはずである．さらに，その関数は1次式（線形）であるはずである．というのは，もし線形でないとすると S 系での等速度運動が S' 系で等速度運動でなくなり，すべての慣性系が同等であることに反するからである．そこ

で，ガリレイ変換からの類推から，

$$x' = f(v)(x - vt),$$
$$(ct)' = g(v)x + h(v)(ct) \tag{3.4}$$

とおいてみる．ここで，$f(v), g(v), h(v)$ は，速度 v の関数である．また，時間座標に c をかけて，長さの次元をもつ ct を扱うことにした．すると，

$$\begin{aligned} &x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 \\ &\quad = (f^2 - g^2)x^2 + y^2 + z^2 - (h^2 - f^2\beta^2)(ct)^2 - 2(f^2\beta + gh)x(ct) \end{aligned} \tag{3.5}$$

となる．ただし，ここで，

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

を導入した．したがって，

$$\begin{aligned} f^2 - g^2 &= 1, \\ h^2 - f^2\beta^2 &= 1, \\ f^2\beta + gh &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

が成り立てば，式 (3.2)，(3.3) と矛盾しない．これを解くと，$f^2 = h^2 = \gamma^2$，$g^2 = \beta^2\gamma^2$ が得られる．ここで，

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

を導入した．さらに，$x \to +\infty$ で，$x' \to +\infty$，および $t \to +\infty$ で，$t' \to +\infty$ を満たす必要があるから，$f = h = \gamma$，$g = -\beta\gamma$ が求まる．よって，S' 系が S 系に対して，x 方向に速度 v で運動しているときの両者の座標間の関係式

$$\boxed{\begin{aligned} ct' &= -\beta\gamma x + \gamma ct, \\ x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z \end{aligned}} \tag{3.7}$$

が得られる．これをローレンツ変換という．また，この変換は，**ローレンツブースト** (Lorentz boost) と呼ばれることも多い．「ブースト」とは，「押す」ことである．時空座標の値は実数であるから，係数 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ も実数でなければならない．したがって，$\beta = v/c < 1$ であり，2 つの座標系の相対速度 v は c より大きくなることはできない．このローレンツ変換を以下のように行列の形で書いておくと便利である．

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

任意の方向へのローレンツ変換を考える場合には，空間座標ベクトル $\mathbf{r}$ をまず，速度ベクトルに平行な空間座標成分 $\mathbf{r}_\parallel$ と垂直な空間座標成分 $\mathbf{r}_\perp$ とに分解して，時間と $x = \mathbf{r}_\parallel \cdot (\mathbf{v}/v)$ に変換 (3.8) を適用し，かつ，$\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp$ とすればよい．

速度 v が c に比べて非常に小さいとき，すなわち，$\beta \ll 1$ が成り立つ場合を，非相対論的な場合という．このとき，

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + (\beta^4 \text{の項}) \approx 1$$

であるから，ローレンツ変換は，

$$\begin{aligned} t' &\approx t - \frac{v}{c^2}x \approx t, \\ x' &\approx x - \beta ct = x - vt \end{aligned} \tag{3.9}$$

となって，ガリレイ変換に帰着する．すなわち，ガリレイ変換は，ローレンツ変換の非相対論的近似式であったのである．

ローレンツ変換 (3.7) を逆に解いて，逆変換を導くことができる．

$$\begin{aligned} ct &= \beta\gamma x' + \gamma ct', \\ x &= \gamma(x' + \beta ct'), \\ y &= y', \\ z &= z' \end{aligned} \tag{3.10}$$

これは S' 系に対して x 軸に沿って速度 $-v$ で動いている S 系の時空座標を

与える．これは式 (3.7) において $\beta = v/c$ を $-\beta$ と置き換えたものに他ならない．S 系は S' 系に対して速度 $-v$ で運動しているからである．

3.2 相対論的効果

ローレンツ変換においては，時間座標と空間座標とから得られる $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ という量は不変である．そこで，$\tau = ict$ という変数を導入すると，ローレンツ変換は，4 次元空間 (τ, x, y, z) における座標原点を中心とする球の半径を不変とする変換，すなわち，4 次元空間内の回転とみなすことができる．これをよりあらわに示すために，

$$\theta \equiv i\eta, \quad \tanh\eta \equiv \beta = \frac{v}{c} \tag{3.11}$$

で定義される変数 θ を用いると，

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} = \frac{\exp(-\eta) + \exp(\eta)}{2} \\
&= \cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\eta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma, \\
\sin\theta &= \frac{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)}{2i} = \frac{\exp(-\eta) - \exp(\eta)}{2i} \\
&= i\sinh\eta = i\tanh\eta\cosh\eta = i\beta\gamma
\end{aligned}$$

となるから，ローレンツ変換 (3.8) は，この変数 θ を使って，

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ x \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

と表すことができる．これは (τ, x) 面内の回転角 $\theta = i\tanh^{-1}\beta$ の回転に他ならない．このことを利用すると，相対論的に正しい，速度の合成則を容易に導くことができる．x 軸方向の連続 2 回のローレンツ変換を考えることにする．すなわち，S' 系は S 系に対して速度 v_1 で動いており，さらに S'' 系は S' 系に対して速度 v_2 で動いているとする．このとき，S'' 系が S 系に対して動いている速度を v とすると，v は，v_1 と v_2 によってどのように表せるであろうか．もちろん，ガリレイ変換においては，$v = v_1 + v_2$ であっ

た．が，ローレンツ変換においては，こうはならない．ローレンツ変換を連続して行うことは，(τ, x) 面内の回転を 2 回連続して行うことと等価であるから，

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1 + \theta_2, \\ \eta &= \eta_1 + \eta_2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

が成り立つ．ここで，$\theta = i\eta$, $\theta_1 = i\eta_1$, $\theta_2 = i\eta_2$，さらに，$\tanh\eta = v/c$, $\tanh\eta_1 = v_1/c$, $\tanh\eta_2 = v_2/c$ である．公式

$$\tanh(\eta_1 + \eta_2) = \frac{\tanh\eta_1 + \tanh\eta_2}{1 + \tanh\eta_1 \tanh\eta_2}$$

を使うと，**相対論的速度合成則**

$$\boxed{\frac{v}{c} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}} \tag{3.14}$$

が導かれる．この速度合成則も $v_1 \ll c$, $v_2 \ll c$ の条件のもとでは，$v \approx v_1 + v_2$ となり，ガリレイの速度合成則に帰着する．また，$v_1/c < 1$, $v_2/c < 1$ のとき，

$$\left(1 + \frac{v_1}{c}\frac{v_1}{c}\right) - \left(\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}\right) = \left(1 - \frac{v_1}{c}\right)\left(1 - \frac{v_2}{c}\right) > 0$$

が成り立つから，

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} < 1$$

である．すなわち，光速より小さい速度を足し合わせても，けっして光速を超えることはできない．

時間の遅れ

ローレンツ変換から得られる結果の 1 つに「時間の遅れ」がある．S 系の同じ場所 $x_{\rm A} = x_{\rm B}$ で，異なる時刻 $t_{\rm A} \neq t_{\rm B}$ に起きた 2 つの事象 A，B を考える．この 2 つの事象を，S 系に対して x 軸方向に速度 v で動いている S' 系の観測者が見たときの，時間間隔を求めてみよう．

$$\begin{pmatrix} ct'_{\mathrm{A}} \\ x'_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

であるから，$ct'_{\mathrm{A}} = \gamma ct_{\mathrm{A}} - \beta\gamma x_{\mathrm{A}}$ であり，事象 B についても同様である．よって，

$$c(t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}}) = \gamma c(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}) - \beta\gamma(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) \tag{3.16}$$

である．そこで，$\Delta t' \equiv t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}}$, $\Delta t \equiv t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}$ とおくと，$x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = 0$ より，

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \tag{3.17}$$

が導ける．$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$ であるから，S' 系での時間間隔 $\Delta t'$ は，S 系の時間間隔 Δt よりも長いのである．ここで，v を $-v$ で置き換えても式 (3.17) は変わらないことに注意しよう．$\gamma(-v) = \gamma(v)$ だからである．

この事象間の時間間隔の伸びを「時間の遅れ」と呼んでいる．この時間の遅れを，われわれの日常生活で感じることはないが，素粒子物理学の研究においてはきわめてよく見られる現象である．時間の遅れは，素粒子や原子核などの崩壊現象を使って厳密に確かめることができる．ミューオン $\mu^{\pm}$ の崩壊を例にとって説明しよう．正電荷のミューオンは，図 3.2 のファインマンダイアグラムで表される弱い相互作用によって，陽電子 e^{+}，反ミューオンニュートリノ $\overline{\nu_{\mu}}$，および，電子ニュートリノ ν_e に崩壊する：$\mu^{+} \to e^{+} + \overline{\nu_{\mu}} + \nu_e$．まずミューオンの崩壊をミューオンの静止系（ミューオンが止まって見える系で，これを S 系とする）で考える．$t = 0$ において $N(0)$ 個あったミューオンが，時刻 $t = t$ に $N(t)$ に減ったとする．このとき，ミューオンの数の減少率 dN/dt は $N(t)$ 自信に比例し，その比例係数を $1/\tau_{\mu}$ とおくと，

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\mu}} N(t) \tag{3.18}$$

となる．これを解くと，

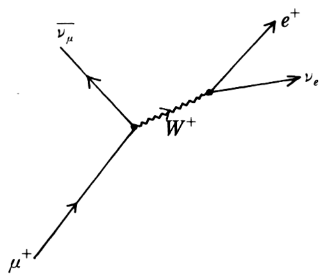


図 3.2　ミューオン崩壊反応 $\mu^+ \to e^+ + \overline{\nu_\mu} + \nu_e$ のファインマンダイアグラム

$$N(t) = N(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_\mu}\right) \tag{3.19}$$

が得られる．この τ_μ をミューオンの平均寿命という．その実験値は，およそ 2.2 μs（1 μs は 10^{-6} s）である．次に，これらのミューオンが，観測者に対して速度 v で動いている場合のミューオンの崩壊を考えてみよう．ミューオンの個数は，それを観測する座標系に無関係であるが，この観測者にとって，ミューオン dN 個が崩壊するのにかかる時間 dt' は，式 (3.17) から，

$$dt' = \gamma dt \tag{3.20}$$

で与えられる．したがって，この観測者にとってミューオンの個数の減り方は，

$$\frac{dN}{N} = -\frac{dt}{\tau_\mu} = -\frac{dt'/\gamma}{\tau_\mu} = -\frac{dt'}{\gamma\tau_\mu} \tag{3.21}$$

となり，これを積分して，

$$N(t') = N(0) \exp\left(-\frac{t'}{\gamma\tau_\mu}\right) \tag{3.22}$$

を得る．つまり，運動しているミューオンの寿命は γ 倍延びて観測されることになるのである．一般に物体の静止系（物体が止まって見える系）にいる時計が刻む時間を，その物体の固有時間 (proper time) と呼ぶ．また，その時計で測った寿命を固有寿命という．ミューオンの固有寿命は 2.2 μs で

あるが，ミューオンが動いて見える系に固定された時計で測った寿命は固有寿命よりも γ 倍長くなる．これを，簡単に「飛んでいるミューオンの寿命は γ 倍長くなる」と表現することが多い．

前述したように，ミューオンは宇宙線として地上に降り注いでいる．ミューオンは，地上数キロメートルの高層大気中で，光速に非常に近い速度 ($\beta \approx 0.9987$, $\gamma \approx 20$) で生成され地表に向かって飛んでくる．これらのミューオンの寿命が固有寿命のままであれば，ミューオンの平均飛行距離は，

$$
\begin{aligned}
L &= (c\beta)\tau_\mu \\
&= (3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \times 0.9987) \times (2.2 \times 10^{-6}\text{s}) \approx 659 \text{ m}
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

しかなく，地表に届く前にほとんどのミューオンは崩壊してしまう．しかし飛んでいるミューオンの寿命は γ 倍延びるので，ミューオンの平均飛行距離も γ 倍延びて，

$$
L = (c\beta)(\gamma\tau_\mu) = 20 \times 659 \text{ m} \approx 13 \text{ km} \tag{3.24}
$$

になり，崩壊する前に十分地表に届くことができるのである．

ローレンツ収縮

次に，S 系で静止している長さ L の棒の長さが，S' 系の観測者にどう見えるかを考えてみよう．棒の両端を A，B とすると，S 系において，

$$
x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} = L \tag{3.25}
$$

と表される．S 系においては，棒は静止しているので，棒の長さを測るために行う A 端，B 端の座標の測定を必ずしも同時に行う必要はない．一方，S' 系の観測者が棒の長さを測定するには，棒が動いているので，棒の両端を同時 ($t'_\mathrm{A} = t'_\mathrm{B}$) に写真に撮る（すなわち，同時刻に両端から到着した光を記録する）必要がある．ここで，式 (3.10) を使うと，

$$
\begin{aligned}
x_\mathrm{A} &= \gamma\beta c t'_\mathrm{A} + \gamma x'_\mathrm{A}, \\
x_\mathrm{B} &= \gamma\beta c t'_\mathrm{B} + \gamma x'_\mathrm{B},
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
x_B - x_A &= \gamma\beta c(t'_B - t'_A) + \gamma(x'_B - x'_A) \\
&= \gamma(x'_B - x'_A)
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

となり,

$$
L' = \frac{L}{\gamma} \tag{3.28}
$$

が導ける. S' 系の観測者にとって,棒は $1/\gamma\,(<1)$ 倍に縮んで見えるのである. ある物体の長さをそれに対して運動している座標系から見ると,静止しているときの長さより縮んで見えるのである. これを**ローレンツ収縮**という.

再び宇宙線ミューオンを例にとって,この現象を考えてみよう. 地上 $L_0 = 5\,\mathrm{km}$ のところを高速で ($\beta \approx 0.9987$, $\gamma = 20$) 地表に向かって飛んでくるミューオンが,その固有寿命が $2.2\,\mu\mathrm{s}$ しかないにもかかわらず地表に届くのは,飛んでいるミューオンの寿命が 20 倍延びたからだと説明した. この現象をミューオンに固定された系で考えてみよう. ミューオンにとっては,地表が速度 $c\beta$ で近づいてくる. したがって,ミューオンと地表との距離は,ミューオンにとって,

$$
L = L_0/\gamma = 5\,\mathrm{km}/20 = 250\,\mathrm{m} \tag{3.29}
$$

であり,地表がミューオンに到達するのにかかる時間は,

$$
t = L/(c\beta) = 250\,\mathrm{m}/(0.9987 \times 3.0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}) = 0.83\,\mu\mathrm{s} \tag{3.30}
$$

となり,ミューオンの固有寿命より十分短い. したがって,地表はミューオンが崩壊してしまう前に,ミューオンに到達するのである. ローレンツ収縮もまた,日常生活の中で体験することはないが,素粒子実験においてはきわめて「日常的な」現象である. また,固有時間同様,静止している物体の長さを**固有長** (proper length) と呼ぶ.

3.3　4元ベクトル

3次元空間におけるベクトルの回転は，ベクトルの長さを変えない．ローレンツ変換は，(ict, x, y, z) の4次元空間内の回転とみなせる．そこで，4元ベクトルなるものを導入すると，ローレンツ変換を見通しよく書くことができる．まず，**反変ベクトル** x^μ なるものを定義する：

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{3.31}$$

ここで，

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{3.32}$$

である．すなわち，

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \tag{3.33}$$

である．さらに，**共変ベクトル** x_μ（μ が，下に付いていることに注意）を次のように定義する．

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \tag{3.34}$$

ここで，

$$x_0 = ct, \quad x_1 = -x, \quad x_2 = -y, \quad x_3 = -z \tag{3.35}$$

である．したがって，x_μ は，

$$x_\mu = (ct, -x, -y, -z) \tag{3.36}$$

に他ならない．反変ベクトルと共変ベクトルの内積

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu &= x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \\ &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2\end{aligned} \tag{3.37}$$

は，ローレンツ変換によって不変な量である．$\sum_{\mu=0}^{3}$ を，いちいち書くのは面倒なので，$x^\mu x_\mu$ のように同じギリシャ文字（この場合 μ）で書かれた添え字が上下に出てくるときは，和 $\sum_{\mu=0}^{3}$ をとるものと約束しておく[(1)]．明らかに，

$$x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu \tag{3.38}$$

が成り立つ．このようにローレンツ変換で不変な量をローレンツスカラーと呼ぶ．この $x^\mu x_\mu$ は，3 次元ベクトルの内積 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ と同様に，ベクトルの長さの 2 乗と考えることができる．ただし，4 次元時空におけるベクトルの長さは，$(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ ではなく，$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ なのである．

ここで，x^μ と x_μ の間の関係をあらわに示すために，**計量テンソル**[(2)]

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

を定義すると，

$$g_{\mu\nu}x^\nu = g_{\mu 0}x^0 + g_{\mu 1}x^1 + g_{\mu 2}x^2 + g_{\mu 3}x^3 = x_\mu \tag{3.40}$$

となるから，

$$x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \tag{3.41}$$

である．3 次元ベクトルのときには，

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

---

(1) これをアインシュタインの規約という．

(2) ベクトルが，その成分を指定するのに，x_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ のように，1 つの添え字で足りるのに対し，添え字が 2 つ以上必要な量を一般にテンソルという．$g_{\mu\nu}$ のように添え字が 2 個の場合（2 階のテンソル）は，行列で表現することができる．

と書くことができることを思い出すと，$g_{\mu\nu}$ は，3 次元単位行列のかわりをしていることがわかる．4 元ベクトルの長さを測るには，$g_{\mu\nu}$ を間にはさむ必要があるのである．

式 (3.8) を 4 元ベクトルを使って書き直すと，4 元ベクトル x^μ は，x 軸方向のローレンツ変換によって，

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

と変換を受ける，ということができる．

3.4　相対論的運動学

このように，ガリレイ変換においては独立な物理量であった，時間座標 t と 3 次元空間ベクトル $\mathbf{x}$ は，実は同一の 4 元ベクトル $x^\mu = (ct, x, y, z)$ の成分であったのである．変換 (3.43) に従う同様な 4 元ベクトルは他にないであろうか．すぐに思いつくのは，運動量ベクトル $\mathbf{p}$ である．質量 m の粒子の運動量ベクトルは，

$$\mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{3.44}$$

で定義されるから，

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{dt} \tag{3.45}$$

とおけないであろうか．x^μ は，4 元ベクトルであるが，dt は，ローレンツスカラーではないので，mx^μ/dt は 4 元ベクトルとして変換しない．そこで，固有時間間隔 $d\tau$ を次のように定義する．

$$d\tau \equiv \sqrt{\frac{dx^\mu dx_\mu}{c^2}} \tag{3.46}$$

ここで，$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dx)$ は，無限小（4 元）変位ベクトルで，

$$dx^\mu dx_\mu = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{3.47}$$

はローレンツスカラーである．したがって，$d\tau$ もまたローレンツスカラーである．空間内の同じ点 $((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = 0)$ における固有時間間隔は，dt に他ならない．さらに，

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{-1 - \frac{1}{c^2}\left\{\frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dt}\right\}^2} = \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} \tag{3.48}$$

である．dt のかわりにこのスカラー量である $d\tau$ を使って，

$$p^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{3.49}$$

を定義すれば，p^μ は 4 元ベクトルとして変換を受ける．この 4 元ベクトル p^μ は，どのような物理的意味をもっているのであろうか．

$$p^1 = m\frac{dx}{d\tau} = m\gamma\frac{dx}{dt} = m\gamma c\beta_x \tag{3.50}$$

ただし，$\beta_x = v_x/c$ である．非相対論的近似 $(\beta \ll 1)$ においては，

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + (\beta^4\text{の項}) \tag{3.51}$$

が成り立つので，

$$p^1 \approx m\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)c \times \beta_x \approx mv_x + (\beta^2 v_x\text{に比例する項}) \tag{3.52}$$

である．すなわち，p^1, p^2, p^3 は，$\beta \ll 1$ でニュートン力学の 3 次元運動量に戻ることがわかる．では，p^0 は何であろうか？

$$\begin{aligned} p^0 &= m\frac{dx^0}{d\tau} = m\gamma\frac{d(ct)}{dt} = mc\gamma \\ &\approx mc\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) = mc + \frac{1}{2}mc \times \frac{v^2}{c^2} = \left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\right)/c \end{aligned} \tag{3.53}$$

ここで $\frac{1}{2}mv^2$ は，粒子の運動エネルギーであるから，

$$p^0 \equiv \frac{E}{c} \tag{3.54}$$

と定義すれば，p^0c はエネルギーの次元をもつ．さらに，$\beta \to 0$ のとき，

$E \to mc^2$ であるから，この mc^2 を質点の**静止エネルギー**と考えることができる．したがって，

$$E = p^0 c = (mc^2)\gamma \tag{3.55}$$

は，質量 m の粒子の全エネルギーとみなすことができる．こうして，4元ベクトル

$$\begin{aligned} p^\mu &= (p^0, p^1, p^2, p^3) \\ &= (E/c, p_x, p_y, p_z) \\ &= (mc\gamma, m\gamma v_x, m\gamma v_y, m\gamma v_z) \\ &= (mc\gamma, mc\gamma\beta_x, mc\gamma\beta_y, mc\gamma\beta_z) \end{aligned} \tag{3.56}$$

は，静止質量 m をもつ粒子の相対論的なエネルギーと運動量を表す4元ベクトルであることがわかった．したがって，エネルギーと運動量は，x 軸方向のローレンツ変換によって，式 (3.43) と同様に変換される：

$$\begin{pmatrix} (\frac{E}{c})' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

相対性原理は，物理法則がすべての慣性系において同じ形をしていることを要求している．ある物理法則が，ローレンツ変換によって結びついている新旧の座標系（すなわち慣性系）において形を変えないとき，その法則はローレンツ共変であるという．力学の基本法則である運動量保存則とエネルギー保存則は，式 (3.56) で定義された4元運動量を使うとローレンツ共変であろうか？　これを次の例で考察してみよう．等しい質量をもつ2つの粒子の弾性散乱を考える．衝突前の粒子の状態をAとB，衝突後の粒子の状態をCとDで表すことにする：

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \to \mathrm{C} + \mathrm{D}$$

S 系において，2つの粒子は等しい速度 v で x 軸上において正面衝突をし，

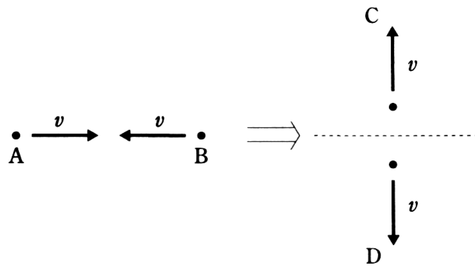


図 3.3　等しい質量をもつ 2 つの粒子の弾性散乱．衝突前の粒子の状態を A と B，衝突後の粒子の状態を C と D で表すことにする．S 系において，2 つの粒子は等しい速度 v で x 軸上において正面衝突をし，その結果進行方向を 90° 変えて y 軸方向に飛んでいったとする．

その結果進行方向を 90° 変えて y 軸方向に飛んでいったとする（図 3.3 参照）．

衝突前の粒子 A，B の非相対論的運動量（質量 × 速度）は，

$$\mathbf{p}_\mathrm{A} = (mv, 0, 0), \quad \mathbf{p}_\mathrm{B} = (-mv, 0, 0) \tag{3.58}$$

であり，

$$\mathbf{p}_\mathrm{A} + \mathbf{p}_\mathrm{B} = \mathbf{0} \tag{3.59}$$

である．弾性散乱であるから，粒子の運動エネルギーも保存され，その結果，

$$\mathbf{p}_\mathrm{C} = (0, mv, 0), \quad \mathbf{p}_\mathrm{D} = (0, -mv, 0) \tag{3.60}$$

であり，

$$\mathbf{p}_\mathrm{A} + \mathbf{p}_\mathrm{B} = \mathbf{p}_\mathrm{C} + \mathbf{p}_\mathrm{D} = \mathbf{0} \tag{3.61}$$

となり，運動量が保存している．

この衝突を粒子 B が静止している S' 系で観察してみよう（図 3.4 参照）．つまり，S 系は S' 系に対し，x 軸方向に速度 v で等速運動していることになる．すると，粒子 A のこの系での衝突前の速度は，x 軸方向を向いていて，その大きさは，速度合成則から，

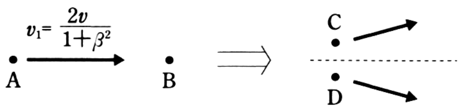


図 3.4　等しい質量をもつ 2 つの粒子の弾性散乱を粒子 B が静止している S' 系で考える．くわしくは本文参照．

$$v_1 = \frac{v+v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2v}{1+\beta^2} \tag{3.62}$$

で与えられる．S' 系における衝突後の 2 つの粒子の速度の x 成分は，粒子の S 系での速度の x 成分が 0 であったので速度合成則からどちらも $\frac{v+0}{1+(v\times 0)/c^2} = v$ で与えられる．ところが，

$$mv_1 + 0 \neq mv + mv \tag{3.63}$$

であるから，質量 × 速度という運動量の非相対論的な定義では S' 系において（x 方向の）運動量保存則が成立しない．つまり，予想通り，非相対論的定義の運動量では，運動量保存則がローレンツ共変になっていないのである．それでは，この衝突を 4 元運動量を使って記述してみよう．まず S 系において衝突を記述すると，

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{A}} &= (mc\gamma, mc\gamma\beta, 0, 0), \\ p_{\mathrm{B}} &= (mc\gamma, -mc\gamma\beta, 0, 0), \\ p_{\mathrm{C}} &= (mc\gamma, 0, mc\gamma\beta, 0), \\ p_{\mathrm{D}} &= (mc\gamma, 0, -mc\gamma\beta, 0) \end{aligned} \tag{3.64}$$

（ただし，$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$）であり，

$$p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{C}} + p_{\mathrm{D}} \tag{3.65}$$

が成り立つ．S' 系における 4 元運動量は，S 系の 4 元ベクトルを x 軸方向に $-\beta$ でローレンツ変換して，

$$
\begin{aligned}
p'_{\rm A} &= \left(mc\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}, 2mc\frac{\beta}{1-\beta^2}, 0, 0 \right), \\
p'_{\rm B} &= (mc, 0, 0, 0), \\
p'_{\rm C} &= \left(mc\frac{1}{1-\beta^2}, mc\frac{\beta}{1-\beta^2}, mc\gamma\beta, 0 \right), \\
p'_{\rm D} &= \left(mc\frac{1}{1-\beta^2}, mc\frac{\beta}{1-\beta^2}, -mc\gamma\beta, 0 \right)
\end{aligned} \tag{3.66}
$$

と得られる．これから，

$$
p'_{\rm A} + p'_{\rm B} = p'_{\rm C} + p'_{\rm D} \tag{3.67}
$$

が成り立っていることがわかる．すなわち，4 元運動量による運動量保存則は，たしかにローレンツ共変である．この 4 元運動量の保存則に基づいて質点の運動を記述することを，**相対論的運動学**と呼んでいる．

x^μ 同様，p^μ からもローレンツスカラーを導くことができる．

$$
p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 \tag{3.68}
$$

は不変量である．ここで，$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ である．質点が静止しているときには，$\beta = 0$, $\gamma = 1$ より，

$$
p^\mu = (mc, 0, 0, 0) \tag{3.69}
$$

であるから，

$$
p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2 \tag{3.70}
$$

が成り立つ．すなわち，粒子の全エネルギー (E)，運動量 (p) と質量 (m) の間には，

$$
E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \tag{3.71}
$$

の関係がある．さらにこの式を解いて，

$$
E = \pm\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \tag{3.72}
$$

という正と負 2 つの解を得る．粒子のエネルギーは正であるから，

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \tag{3.73}$$

である．特殊な場合として，フォトンやグルーオンのように質量のない粒子の場合には，

$$E = pc \tag{3.74}$$

である．また，4 元運動量の定義式 (3.56) より，運動している粒子の β, γ と E, p の間には，

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{pc}{E}, \\ \gamma &= \frac{E}{mc^2}, \\ \beta\gamma &= \frac{pc}{mc^2} \end{aligned} \tag{3.75}$$

の関係がある．したがって，粒子の運動が非相対論的である $\beta \ll 1$ の場合には（$\gamma \approx 1$ だから），

$$\beta\gamma = \frac{pc}{mc^2} \ll 1 \tag{3.76}$$

が成り立ち，粒子のもつエネルギーは，

$$\begin{aligned} E = \sqrt{(mc^2)^2 \left\{1 + \left(\frac{pc}{mc^2}\right)^2\right\}} &\approx (mc^2)\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{pc}{mc^2}\right)^2\right\} \\ &= mc^2 + \frac{p^2}{2m} \end{aligned} \tag{3.77}$$

と近似できる．これは，粒子の静止質量エネルギーと運動エネルギー (T)

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \tag{3.78}$$

の和に等しい．

3.5　ディラック方程式と反粒子

さて，相対論と両立する量子論とはどのようなものであろうか．前章で

説明したように，質量 m の自由粒子（何も力を受けていない粒子）のシュレーディンガー方程式は，式 (3.78) を使って，(T, p_x, p_y, p_z) を

$$T \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\ p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x},\ p_y \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y},\ p_z \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.79}$$

と，微分演算子に置き換え，波動関数 $\psi(x, y, z, t)$ に作用させることによって得られる：

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x, y, z, t) \tag{3.80}$$

この方程式は，$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ の非相対論的近似に基づいているのだから，相対論的なエネルギーと運動量の関係式を使えば，相対論的量子論ができるのではないであろうか．そこで，まず，演算子への置き換えの式 (3.79) を 4 元運動量を使って，「相対論らしく」書き直してみる．$x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$ であることを思い出して，

$$\begin{aligned} p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z) &\to \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} \end{aligned} \tag{3.81}$$

ここで，

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{3.82}$$

を定義すると，演算子への置き換えは，

$$p^\mu \to i\hbar\partial^\mu \tag{3.83}$$

と簡潔に表せる．また，$\partial_\mu = g_{\mu\nu}\partial^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ であるから，

$$p_\mu \to i\hbar\partial_\mu \tag{3.84}$$

である．すると，

$$p^\mu p_\mu - (mc)^2 = (E/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - (mc)^2 = 0 \tag{3.85}$$

から，

$$-\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \psi - (mc)^2 \psi = 0 \tag{3.86}$$

すなわち，

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi \tag{3.87}$$

が導ける．これは，クライン・ゴルドン (Klein-Gordon) 方程式と呼ばれる方程式で，スピン 0 のボゾンを記述する方程式として知られている．同時に，この方程式は，クォークやレプトンのようなスピン 1/2 のフェルミオンを記述するには不適当であることもわかっている．

フェルミオンを記述する相対論的量子論の方程式は，ディラック方程式と呼ばれるものである．以下でその概要を説明しよう．ディラック方程式は，式 (3.85) に基づく，（クライン・ゴルドン方程式のような 2 階でない）1 階の微分方程式をさがすことから始まる．

4 つの適当な係数 $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ を選んで，

$$p^\mu p_\mu - (mc)^2 = (\gamma^\kappa p_\kappa - mc)(\gamma^\lambda p_\lambda + mc) \tag{3.88}$$

という因数分解ができるかどうか調べてみよう．上式を具体的に書き下すと，

$$\begin{aligned}
&(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - (mc)^2 \\
&= (\gamma^0 p^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3 - mc)(\gamma^0 p^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3 + mc) \\
&= (\gamma^0)^2 (p^0)^2 + (\gamma^1)^2 (p^1)^2 + (\gamma^2)^2 (p^2)^2 + (\gamma^3)^2 (p^3)^2 \\
&\quad + (\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0) p^0 p^1 + (\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0) p^0 p^2 + (\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0) p^0 p^3 \\
&\quad + (\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1) p^1 p^2 + (\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1) p^1 p^3 + (\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2) p^2 p^3 \\
&\quad - (mc)^2
\end{aligned} \tag{3.89}$$

これを整理すると，係数 $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ が満たすべき条件は，

$$(\gamma^0)^2 = 1,\ (\gamma^1)^2 = -1,\ (\gamma^2)^2 = -1,\ (\gamma^3)^2 = -1 \tag{3.90}$$

および，

$$\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 0 \quad (\mu \neq \nu)} \tag{3.91}$$

である[3]．ただの数では，これらを同時に満たすことはできないが，行列であれば可能である．これらの条件を満たす 4 つの 4 行 4 列の行列はディラックのガンマ行列と呼ばれ，次のように与えられる．

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.92}$$

さらに，これらは，2 行 2 列のパウリ (Pauli) 行列 τ^1, τ^2, τ^3：

$$\boxed{\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \tag{3.93}$$

を使って，

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \tau^j \\ -\tau^j & 0 \end{pmatrix} \ (j = 1, 2, 3) \tag{3.94}$$

と簡潔に表すことができる．ただし，ここで，1 は 2 行 2 列の単位行列，0 は 2 行 2 列の 0 の意である．

これら 4 行 4 列のガンマ行列を使うと，$p^\mu p_\mu - (mc)^2 = 0$ から，

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0 \tag{3.95}$$

あるいは，

(3) これらの条件式は，反交換関係 $\{A, B\} \equiv AB + BA$ と計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を使うと $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ と表すことができる．

$$\gamma^\mu p_\mu + mc = 0 \tag{3.96}$$

である．このどちらを採用しても同様の結果が得られるので，ここでは式 (3.95) のほうを採用することにする．ここで，$p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$ の置き換えを行うと，ディラック方程式

$$\boxed{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0} \tag{3.97}$$

が得られる．ただし，γ_μ は，4 行 4 列の行列であるから，波動関数 ψ も 4 つの成分をもつ関数である：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{3.98}$$

これをディラックスピノルと呼ぶ(4)．

さて，ディラック方程式を解くとどのような波動関数が得られるのであろうか．素粒子実験では，エネルギーと運動量の決まった粒子を扱う．そこで，エネルギーと運動量の決まった粒子状態を記述する波動関数（**平面波解**と呼ぶ）を求めることにする．まず，ディラック方程式は，4 つの連立方程式であるから，4 つの独立な解が存在することに注意しよう．平面波解は，$u_k(p)$ を運動量 p に依存するスピノル(5)として，

$$\psi(x, y, z, t)^{(k)} = u_k(p)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu\right) \quad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{3.99}$$

のように書ける．ただし，

$$E^2 = (pc)^2 + (mc)^2 \tag{3.100}$$

---

(4) ディラックスピノルは，4 成分をもっているが，4 元ベクトルではない．

(5) すなわち，$u_k(p) = \begin{pmatrix} u_k^1(p) \\ u_k^2(p) \\ u_k^3(p) \\ u_k^4(p) \end{pmatrix}$ である．

が成り立っていなければならない．$u_k(p)$ は，式 (3.99) をディラック方程式に直接代入して求めればよいが，$p_x = p_y = p_z = 0$ のときには特に容易に求まる．この場合，ディラック方程式は，$i\hbar\gamma^0\partial_0\psi - mc\psi = 0$ だから，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} \\ -\frac{\partial\psi_3}{\partial t} \\ -\frac{\partial\psi_4}{\partial t} \end{pmatrix} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

となり，$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}E\psi$ を使うと，

$$\begin{pmatrix} Eu_k^1 \\ Eu_k^2 \\ -Eu_k^3 \\ -Eu_k^4 \end{pmatrix} = mc^2\begin{pmatrix} u_k^1 \\ u_k^2 \\ u_k^3 \\ u_k^4 \end{pmatrix} \tag{3.102}$$

に他ならない．これを解くと，$E = mc^2$ のとき，

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.103}$$

が解であり，$E = -mc^2$ のとき，

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.104}$$

が解である．したがって，4 つの独立な ψ は，

$$\psi^{(1)} = \exp(-\tfrac{imc^2}{\hbar}t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \psi^{(2)} = \exp(-\tfrac{imc^2}{\hbar}t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$
$$\psi^{(3)} = \exp(+\tfrac{imc^2}{\hbar}t)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \psi^{(4)} = \exp(+\tfrac{imc^2}{\hbar}t)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{3.105}$$

である．$\psi^{(1)}$ と $\psi^{(2)}$ は，エネルギーが $E = mc^2$ で，異なるスピン状態に対応している．スピン 1/2 のフェルミオンは，スピンの z 軸方向成分 ($s_z = +1/2, -1/2$) によって 2 つの状態に分けることができる．この 2 つの別々の状態（一般にスピン上向き，下向きと呼ぶことが多い）に対応するのが $\psi^{(1)}$ と $\psi^{(2)}$ である．同様に，$\psi^{(3)}$ と $\psi^{(4)}$ は，エネルギーが $E = -mc^2$，すなわち負で，異なるスピン状態にある粒子の波動関数である．

ディラック方程式の一般解（$\mathbf{p} \neq 0$ のとき）は，$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ の

$$\psi^{(1)} = \exp(-\tfrac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu)\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{p_z c}{E+mc^2}\\\frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2}\end{pmatrix},$$
$$\psi^{(2)} = \exp(-\tfrac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu)\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2}\\\frac{-p_z c}{E+mc^2}\end{pmatrix} \tag{3.106}$$

の 2 つと，$E = -\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ の

$$\psi^{(3)} = \exp(-\tfrac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu)\begin{pmatrix} \frac{p_z c}{E-mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E-mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi^{(4)} = \exp(-\tfrac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu)\begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E-mc^2} \\ \frac{-p_z c}{E-mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3.107)$$

である．$\psi^{(1)}$ と $\psi^{(2)}$ は，相対論的に正しい（正の）エネルギーをもつ，2つの異なるスピン状態にある粒子を表していることは，すぐに想像がつくが，$\psi^{(3)}$ と $\psi^{(4)}$ という負のエネルギーをもつ波動関数は一体何を意味しているのであろうか？　自由空間における粒子のエネルギーは正でなければならないはずで，負のエネルギーをもつ粒子とは何を意味しているのであろうか？　実はこの負のエネルギーをもった波動関数は，正エネルギーの「反」粒子の波動関数を表していることがわかっている．$\psi^{(1)}$ と $\psi^{(2)}$ を電子の波動関数とすると，$\psi^{(3)}$ と $\psi^{(4)}$ は電子の反粒子，すなわち，陽電子の波動関数なのである．スピン 1/2 のフェルミオンはディラック方程式に従うので，すべてのフェルミオンには，対応する反フェルミオンが存在する．表 3.1 に示したように，すべてのクォークとレプトンに対応して，それぞれ反クォークと反レプトンが存在しているのである(6)．反粒子は，粒子と同一の質量をもつが，（反ニュートリノを除いて）電荷の符号が逆になっている．

ディラック方程式は，電子のようなスピン 1/2 のフェルミオンについて，相対論的に正しいシュレーディンガー方程式をさがした結果，得られたものである．得られたディラック方程式は，負のエネルギー解として「反粒子」，すなわち反クォーク，反レプトンの存在を予言した．これら反粒子の存在は，実験によって確立している．

(6) 一般にクォーク q の反粒子を $\overline{q}$，ニュートリノの反粒子を $\bar{\nu}$ で表す．e, μ, τ については，その反粒子を $\bar{e}, \bar{\mu}, \bar{\tau}$ で表すこともあるが，粒子を e^-, μ^-, τ^-，反粒子を e^+, μ^+, τ^+ で表すことが多い．

表 3.1　反クォークと反レプトン

反クォーク		反レプトン	
フレーバー	電荷 (e)	フレーバー	電荷 (e)
$\overline{u}$	$-2/3$	$\overline{\nu_e}$	0
$\overline{d}$	$+1/3$	e^+	$+1$
$\overline{c}$	$-2/3$	$\overline{\nu_\mu}$	0
$\overline{s}$	$+1/3$	μ^+	$+1$
$\overline{t}$	$-2/3$	$\overline{\nu_\tau}$	0
$\overline{b}$	$+1/3$	τ^+	$+1$

3.6　右巻きの粒子と左巻きの粒子

ディラック方程式から導かれる粒子のもう 1 つの重要な性質に，右巻きと左巻きがある．右巻きとはスピン(7)を粒子の運動方向（すなわち運動量ベクトルの方向）に射影したときその符号が正の状態をいい，逆に，左巻きとはその符号が負（つまりスピンと運動量ベクトルが逆向き）の状態をいう．この右巻きと左巻きの違いは，素粒子物理において大きな役割を演じる．特に，弱い相互作用のゲージボゾンである W^+，W^- ボゾンは，クォークやレプトンの状態が右巻きか左巻きかを区別する．以下で，この右巻きと左巻きについて，もう少しくわしく説明しよう．

スピノル ψ を次のように「分解」する．

$$\psi = \frac{(1-\gamma^5)}{2}\psi + \frac{(1+\gamma^5)}{2}\psi = \psi_L + \psi_R, \tag{3.108}$$

ここで，

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.109}$$

であり，

(7) 電子のスピンとは，大きさが $\frac{\hbar}{2}$ の角運動量ベクトルであることを思い出してほしい．

$$\boxed{\psi_L \equiv \frac{(1-\gamma^5)}{2}\psi, \quad \psi_R \equiv \frac{(1+\gamma^5)}{2}\psi} \tag{3.110}$$

である．γ^5 行列には以下のような性質がある．

$$\begin{aligned}
\gamma^5\psi^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z c}{(E+mc^2)} \\ \frac{(p_x+ip_y)c}{(E+mc^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_z c}{(E+mc^2)} \\ \frac{(p_x+ip_y)c}{(E+mc^2)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{p_z c}{(E+mc^2)} & \frac{(p_x-ip_y)c}{(E+mc^2)} & 0 & 0 \\ \frac{(p_x+ip_y)c}{(E+mc^2)} & \frac{-p_z c}{(E+mc^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_z c}{(E-mc^2)} & \frac{(p_x-ip_y)c}{(E-mc^2)} \\ 0 & 0 & \frac{(p_x+ip_y)c}{(E-mc^2)} & \frac{-p_z c}{(E-mc^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z c}{(E+mc^2)} \\ \frac{(p_x+ip_y)c}{(E+mc^2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{c(p_x\tau^1+p_y\tau^2+p_z\tau^3)}{E+mc^2} & 0 \\ 0 & \frac{c(p_x\tau^1+p_y\tau^2+p_z\tau^3)}{E-mc^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z c}{(E+mc^2)} \\ \frac{(p_x+ip_y)c}{(E+mc^2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{c\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\tau}}{E+mc^2} & 0 \\ 0 & \frac{c\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\tau}}{E-mc^2} \end{pmatrix} \psi^{(1)}
\end{aligned} \tag{3.111}$$

ここで，τ^1, τ^2, τ^3 は前出のパウリ行列で，$\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\tau} = p_x\tau^1 + p_y\tau^2 + p_z\tau^3$ である．$\psi^{(2)}, \psi^{(3)}, \psi^{(4)}$ についてもまったく同様で，$k = 1, 2, 3, 4$ について

$$\boxed{\gamma^5\psi^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{c\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\tau}}{E+mc^2} & 0 \\ 0 & \frac{c\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\tau}}{E-mc^2} \end{pmatrix} \psi^{(k)}} \tag{3.112}$$

が成り立つ．

粒子のエネルギーが十分に大きくて，その質量が無視できる場合 ($E = |\mathbf{p}|c$) を考える．z 軸を粒子の運動方向に選ぶと，$p_x = p_y = 0$, $p_z = E/c$ であるから，式 (3.112) から，

$$\begin{aligned}
\gamma^5\psi^{(1)} &= (+1)\psi^{(1)}, \\
\gamma^5\psi^{(2)} &= (-1)\psi^{(2)}, \\
\gamma^5\psi^{(3)} &= (+1)\psi^{(3)}, \\
\gamma^5\psi^{(4)} &= (-1)\psi^{(4)}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

となり，これらは，$\psi^{(1)}$ と $\psi^{(3)}$ が，粒子のスピンと運動量ベクトルが同じ向きを向いている状態，すなわち右向きであること，逆に $\psi^{(2)}$ と $\psi^{(4)}$ が左巻きの状態であることを意味している．したがって，一般にスピノル ψ に $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ を作用させると，左巻きの成分 ψ_L を取り出すことができ，逆に，右巻き成分 ψ_R は，ψ に $\frac{1}{2}(1+\gamma^5)$ を作用させることによって得ることができる．後述するように，弱い相互作用においては，この ψ_L と ψ_R の違いが顕著に現れる．$W^{\pm}$ ボゾンが，ψ_L にしか結合しないからである．

3.7　トップクォークの発見

トップクォーク（t クォークは，トップクォークとも呼ばれる）は，1995 年，米国のフェルミ国立研究所において発見された．フェルミ国立研究所には，陽子 (p) と電荷の符号は反対だが，陽子と同一の質量をもつ反陽子 ($\bar{p}$)(8) のそれぞれを 0.8 TeV のエネルギーにまで加速して正面衝突させるテバトロン (TEVATRON) と呼ばれる装置がある．1 TeV は，10^{12} eV である．テバトロンは，全長約 6 km の円形トンネルの中に荷電粒子である陽子と反陽子を電場で加速する装置と，それらを磁場によるローレンツ力を使って曲げトンネル中を周回させるための電磁石を並べたものである（図 3.5）．テバトロンのような装置を総称して粒子加速器あるいは単に加速器と呼んでいる．

陽子と反陽子を衝突させると何が起こるであろうか．陽子は，クォークとその間に交換される強い相互作用のゲージボゾン，グルーオンが集まってできている．反陽子も同様に反クォークとグルーオンからできている．これ

---

(8) p は，uud の 3 つのクォークからなり，$\bar{p}$ は，$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$ の 3 つの反クォークからなっている．



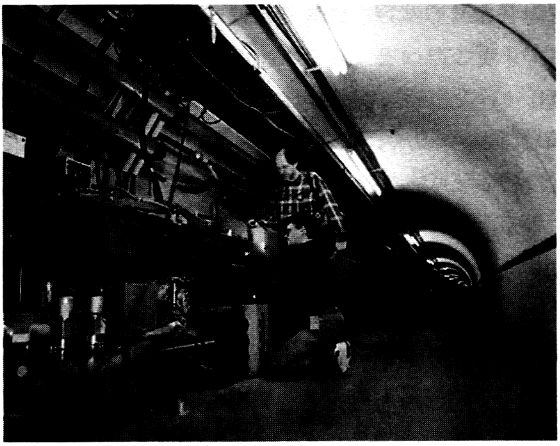


図 3.5 (上) 米国フェルミ国立研究所．前方がメインインジェクター加速器．後方がテバトロン加速器．(下) テバトロン加速器のトンネル内の様子．©Fermilab

らの素粒子が引き起こす反応を素過程と呼び，図 3.6 は，陽子と反陽子の中にある素粒子から t クォークと $\bar{t}$ クォークの対を生成する素過程のファインマンダイアグラムの形で示したものである．図 3.6(a) は，u クォークと $\bar{u}$ クォークが衝突して，グルーオンになり，さらに，そのグルーオンから t クォークと $\bar{t}$ クォークができるのである．

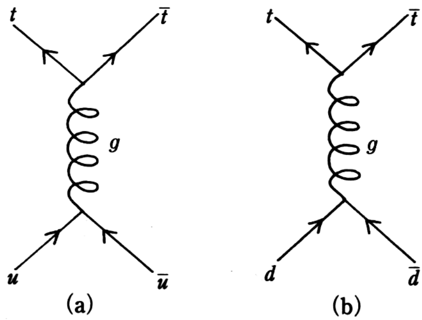


図 3.6　(a) 陽子中の u クォークと反陽子中の反 u クォーク ($\bar{u}$) が衝突してトップクォークと反トップクォークペア ($t\bar{t}$) を生成するファインマンダイアグラム．(b) d クォークと反 d クォーク ($\bar{d}$) の衝突する素過程．

この素過程の終わりの状態（終状態）においては，t と $\bar{t}$ クォークができているので，およそ $174 \times 2 = 348$ GeV/c^2 の質量がつくり出されている（1 GeV は，10^9 eV である）．一方，始めの状態（始状態）は，約 $5 \times 2 = 10$ MeV/c^2 の質量しかなく，終状態の質量の 3×10^{-5} 程度しかない．なぜ，このような反応が可能なのであろうか？　それは，陽子と反陽子を加速したことによって，それらが運動エネルギーを得，その結果，u クォークと $\bar{u}$ クォークも十分高い運動エネルギーをもつようになったからである．この運動エネルギー（と u クォークと $\bar{u}$ クォークの質量）が，$E = mc^2$ の公式に従って，質量に転化したのである．

これをエネルギーに換算するには，$E = mc^2$ の公式を使えばよい．したがって，終状態は 348 GeV/$c^2 \times c^2 = 348$ GeV のエネルギーをもっていることになる．逆に言うと，これだけのエネルギーをつくり出す加速器なしには，t クォークのような重い粒子をつくり出すことはできない．第 2 世代，第 3 世代の粒子の発見や，W ボゾンや Z ボゾンのような重い粒子の発見は，それらの質量を生み出すことのできる加速器なしにはできないのである．先にも述べたように，t クォークは，クォークでありながら，その質量は金原子 1 個に相当する．このような粒子を発見できたのは，テバトロンという強力な加速器が必要なエネルギーをつくり出せたからである．

3.8 粒子と波動関数と場

相対論的に正しいシュレーディンガー方程式の探求から，ディラック方程式が発見され，その結果，反粒子の概念が生まれた．ディラック方程式の解である波動関数スピノルを使って，エネルギーから粒子（フェルミオン）と反粒子（反フェルミオン）のペアをつくり出す素過程を記述することができるようになった．

このように，粒子の生成と消滅を記述するには，量子力学と相対論が本質的な役割を果たす．素粒子の運動を記述するには，相対論的に正しい波動関数を使って，素過程を記述する必要がある．この「相対論的に正しい量子力学」を完成させたのが，**場の量子論**と呼ばれる理論である．**場**とは，4 元ベクトル x^μ の関数（一般に複素関数）であり，その場の従う方程式を導き，解くことが，素粒子の相対論的に正しい量子力学的記述に他ならない．本書の以下の議論においては，「場」を 4 元ベクトル x^μ の関数である波動関数とみなしてかまわない．場には，ローレンツ変換によって不変な（つまりローレンツスカラーである）スカラー場，ローレンツ変換でベクトルとして変換するベクトル場，それにスピノルとして変換するスピノル場などの種類がある．

第 4 章 陽子の構造

第2章で述べたように，原子のサイズは，およそ 10^{-10} m であり，原子核のサイズは，10^{-14} m 程度である．さらに，原子核を構成している核子(陽子および中性子）のサイズは，10^{-15} m (= 1 fm) 程度である．そして物質の究極の構成粒子であるクォークとレプトンにいたっては，10^{-18} m 以下であることが確認されており，点粒子と考えてよい．では，どうやってこれら粒子の大きさを測ったのであろうか？　原子，原子核，さらには，陽子，中性子の内部構造はどのように調べられたのであろうか？

われわれが，光学顕微鏡で微生物の大きさを測るとき，微生物の大きさや構造の情報を運んでくるのは光である．われわれは，微生物にあたって散乱した光をレンズで集めて観測しているのである．このプロセスは，フォトンの微生物による散乱現象として説明できる．まず，たくさんのフォトンが標的である微生物に当たって散乱する．それらのフォトンが，（レンズを経て）網膜すなわちスクリーンのどこに到達したかを脳が検出することによって微生物の像が観測できたのだといえる．1つ1つのフォトンの運んでいる情報は，エネルギーと運動量であるから，この情報をそれぞれのフォトンについて測定すると，フォトンがスクリーンのどこに到達するかがわかる．つまり，散乱されたフォトンのエネルギーと運動量を測定することによって標的の大きさや構造の情報が得られるはずである．フォトンは電磁相互作用をする粒子であるが，散乱させる粒子は，標的と相互作用さえすればフォトンでなくてもよいはずである．たくさんの粒子を対象に向かって投げ，対象から散乱されてくる粒子を検出し，そのエネルギーと運動量を測定すれば，標的の大きさや構造がわかるはずである．

ただし，サイズが原子程度，あるいは，それより小さな標的を測定する場合には，散乱粒子の波動性を考慮する必要がある．光学顕微鏡の解像度は，光の波としての性質，すなわち，光が一部その物体の陰に回り込む現象（回折現象）によって決まっている．回折の度合は，光の波長に比例している．同様に，粒子の波動性，すなわち，ド・ブロイ波長の大きさが，粒子散乱による測定の解像度（分解能）を決める．電子線を使ったヤングの実験を思い出すと，電子の波動関数は，ド・ブロイ波長をもつ波動として干渉を起こす．したがって，標的のサイズと比べて，同程度か，より小さいド・ブロイ波長をもつ粒子を使わないと，標的の様子がわかるような鮮明な情報（像）を得ることができない．

4.1　原子の構造を探る—ラザフォード散乱—

原子は，負の電荷をもつ Z 個の電子と，その負電荷を打ち消す正電荷によって電気的中性を保っている．1912 年，ラザフォード (Ruthrerford) は，ラドンの崩壊から出てくる α（アルファ）粒子を使って，正電荷が原子中でどのように分布しているのかを測定する実験を考えた．α 粒子とは，2 個の陽子と 2 個の中性子とからなる粒子，すなわち，ヘリウム原子の原子核であり，その電荷 q は $+2e$，その質量 m_α は約 3.7 GeV/c^2 である．また，ラドンの α 崩壊

$$^{222}\mathrm{Rn} \to {}^{218}\mathrm{Po} + \alpha \tag{4.1}$$

から放出された α 粒子の運動エネルギー T は，5.5 MeV である．したがって，この α 粒子のド・ブロイ波長は，

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{hc}{pc} &= \frac{hc}{\sqrt{(T+m_\alpha c^2)^2 - (m_\alpha c^2)^2}} = \frac{1,240\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}}{202\ \mathrm{MeV}} \\ &\approx 6\ \mathrm{fm}\ (= 6\times 10^{-15}\ \mathrm{m}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

であり，原子のサイズ 10^{-10} m より十分に小さい．さらに，α 粒子の質量は電子の質量の 7,000 倍以上もあり，電子との衝突は無視できる．したがって，原子の中心に分布している正電荷の様子が観測できるはずである．図

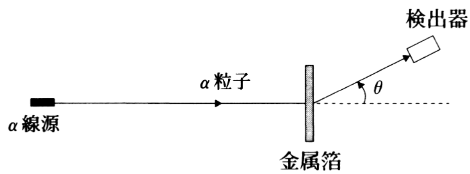


図 4.1　ラザフォード α 粒子散乱実験の概念図．薄い金属箔にたくさんの α 粒子を照射し，散乱された α 粒子の散乱角度 θ を測る．

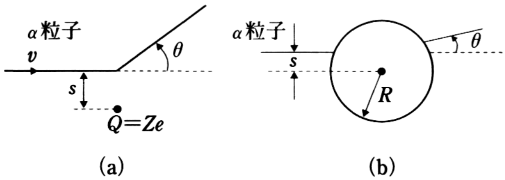


図 4.2　ラザフォード散乱．標的が (a) 点電荷の場合と (b) 半径 R の一様に帯電した球の場合．

4.1 は，ラザフォードの実験の概念図である．薄い金属箔にたくさんの α 粒子を照射し，散乱された α 粒子の散乱角度 θ を測る．この散乱粒子の角度分布 $dN/d\theta$ が，金属原子の内部構造についての重要な情報をもっているのである．これを見るために，標的の原子に大きさがない場合，すなわち点電荷である場合と，標的が半径 R の一様に帯電した球である場合を考えてみよう．

いま，図 4.2(a) のように，α 粒子が，速度 v で，z 軸に沿って飛んできたとする．原子中の正電荷 $Q = Ze$（Z は原子番号）は，原子の中心に位置する点電荷であり，z 軸から s の距離にある．α 粒子と原子中の正電荷は，フォトンを交換して電磁相互作用し，その結果，α 粒子の運動量は変化し，α 粒子は z 軸から散乱角度 θ の方向に飛んでいく．このとき，θ の大きさは以下のような近似で推測することができる．α 粒子の運動量の変化 Δp は，α 粒子が Q の近傍を通過する間に，z 軸に垂直な方向に受ける力積 $F\Delta t$ に等しい：

$$\Delta p = F\Delta t \approx \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{s^2}\right)\left(\frac{2s}{v}\right) \tag{4.3}$$

ここで，F を $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{s^2}$，$\Delta t$ を $\frac{2s}{v}$ 程度と近似した．α 粒子の運動エネルギー

T は，$T = \frac{1}{2}m_\alpha v^2$ で与えられるから[(1)]，散乱角度は，

$$\theta \approx \frac{\Delta p}{p(= m_\alpha v)} = F \cdot \frac{2S}{v} \cdot \frac{v}{2T} = \frac{Fs}{T} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{sT} \tag{4.4}$$

となる．このように，散乱角度 θ は，s に反比例し，標的が大きさをもたない点電荷である場合には，標的近傍に到達した α 粒子は，大きな角度をもって散乱され，ときには，入射方向と反対の方向に散乱する（これを後方散乱という）ことも予想される．

次に，原子中の正電荷が，点ではなく半径 R の一様に帯電した球である場合を考えよう（図 4.2(b) 参照）．一様に帯電した球のつくる電場 E は，ガウスの法則（の積分形）[(2)]を使うと，s を球の中心からの距離として，$s \leq R$ のとき，

$$E \times 4\pi s^2 = \frac{1}{\epsilon_0}Q \times \frac{s^3}{R^3}, \tag{4.5}$$

すなわち，

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{s}{R^3}, \tag{4.6}$$

$s > R$ のとき，

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{s^2} \tag{4.7}$$

で与えられる．α 粒子の受ける力 F は，$F = qE$ で与えられるから，散乱角度 θ は（$\theta \approx \frac{Fs}{T}$ より），

$$\theta \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} \dfrac{qQs^2}{TR^3} & (s \leq R), \\ \dfrac{qQ}{sT} & (s > R) \end{cases} \tag{4.8}$$

となる．この場合の散乱角度は，$s = R$ で最大で，$s \to 0$ で $\theta \to 0$ である．すなわち，電荷分布の中心付近に入射した α 粒子は，そのまま入射方向に飛んでいくことになる．これは，正電荷が点電荷である場合に予想される散

---

(1) ここで，α 粒子のエネルギーは質量と比べて十分に小さいので非相対論的扱いでよい．

(2) 任意の閉曲面において，面に垂直な電場成分の積分値は，閉曲面中の総電荷を ϵ_0 で割ったものに等しい．ガウスの法則については，電磁気学の教科書を参照してほしい．

乱角度分布と大きく異なる．したがって，原子によって散乱される α 粒子の散乱角度分布 $(dN/d\theta)$ を測定すれば，原子中の正電荷の分布が空間的に広がっているのか，点電荷であるのかを調べることができる．

ここで，散乱現象をよりくわしく記述するために，散乱の断面積を定義しておこう．たとえば，ビー玉を半径 R の大きな鉄の球に向かって投げつけるとしよう．鉄の球の大きさに比べてビー玉の大きさが無視できるとき，ビー玉が鉄球によって当たって散乱する頻度は，鉄球の断面積 $\sigma = \pi R^2$ に比例する．つまり，断面積は，入射粒子（ビー玉）から見た標的（鉄球）の大きさに他ならない．α 粒子の原子核による散乱においても，標的の断面積を定義することができる．入射粒子の単位面積，単位時間あたりの個数を入射フラックス (flux)，単位時間あたりの散乱事象数を散乱頻度と呼ぶことにする．入射フラックス N の入射粒子が，標的によって散乱頻度 N' で散乱されたとき，標的の**全断面積** σ を，

$$\sigma = \frac{\text{散乱頻度}}{\text{入射フラックス}} = \frac{N'(\text{個数}/\text{時間})}{N(\text{個数}/\text{面積}/\text{時間})} = \frac{N'}{N}(\text{面積}) \tag{4.9}$$

と定義する．断面積は，面積の単位をもつ．しかし，1 m^2 を原子や原子核の大きさの単位とするには大きすぎるので，素粒子・原子核物理では，1 barn (b，バーン)

$$1\ b \equiv 10^{-28}\ \mathrm{m}^2 \tag{4.10}$$

という単位が使われる．

では，α 粒子の原子核による散乱，ラザフォード散乱の断面積を求めてみよう．α 粒子のド・ブロイ波長が十分に短いとき，この散乱は中心力を受ける古典的粒子の散乱として扱うことができる．ここでは，α 粒子と原子核の両方を点電荷として扱う．図 4.2(a) のように，α 粒子が，座標原点に静止している原子核に速度 v で入射する．もし，標的原子核と α 粒子が相互作用をしないとすれば，α 粒子と標的原子核との最近接距離は s となる．この変数 s を衝突パラメータと呼ぶ．散乱角度 θ は，図 4.3 のように入射 α 粒子の運動量ベクトル $\mathbf{p}_1$ と散乱 α 粒子の運動量ベクトル $\mathbf{p}_2$ のなす角度である．s が小さいとき，α 粒子は強いクーロン力を受けるので，大きく散乱

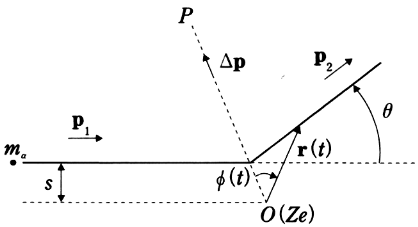


図 **4.3**　ラザフォード散乱の運動学

し θ は大きく，s が大きいときは，逆に θ は小さい．衝突断面積 σ を衝突パラメータ s で表せば，微分断面積 $d\sigma$ は，半径 s，幅 ds のリングの面積に等しい：

$$d\sigma = 2\pi s ds \tag{4.11}$$

われわれが求めたいのは，散乱角度の分布

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{d\cos\theta} = 2\pi s\frac{ds}{d\cos\theta} \tag{4.12}$$

であるから，s と $\cos\theta$ の関係式を求めたい．標的原子核の質量が，α 粒子の質量より十分に大きいとき，α 粒子の散乱前後の運動量の変化は，大きさは変わらず，その方向のみである（すなわち α 粒子は弾性散乱をする）．

$$\begin{aligned}(\Delta\mathbf{p})^2 &= (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \\ &= p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta \\ &= 2p^2(1-\cos\theta)\end{aligned} \tag{4.13}$$

ここで，$p = p_1 = p_2 = m_\alpha v$，$v$ は α 粒子の速度である．よって，

$$\begin{aligned}|\Delta\mathbf{p}| &= m_\alpha v\sqrt{2(1-\cos\theta)} \\ &= 2m_\alpha v\sin(\theta/2)\end{aligned} \tag{4.14}$$

この運動量の変化 $\Delta\mathbf{p}$ は，α 粒子が受けた力積に等しいはずである．散乱前後の α 粒子の運動量変化の向きは，図 4.3 からわかるように $(\pi-\theta)$ を 2 等分した直線 (OP) 上にある．したがって，α 粒子が原子核から受けるクーロン力 $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$ の OP 方向成分を積分したものが，力積である．

$$|\Delta \mathbf{p}| = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} F(t)\cos\phi(t)dt = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\int_{t=-\infty}^{t=+\infty}\frac{\cos\phi(t)}{r^2(t)}dt \tag{4.15}$$

ここで，$r(t)$ は，時刻 t における α 粒子と原子核との距離，$\phi(t)$ は，原子核から α 粒子への位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ と直線 OP のなす角度である．α 粒子の原子核まわりの角運動量 L は，

$$L = m_\alpha r^2 \frac{d\phi}{dt} \tag{4.16}$$

で与えられる．角運動量保存則より，これは，$t = -\infty$ での角運動量 $m_\alpha vs$ に等しい：

$$m_\alpha vs = m_\alpha r^2 \frac{d\phi}{dt} \tag{4.17}$$

よって，

$$\frac{dt}{r^2} = \frac{d\phi}{vs} \tag{4.18}$$

であり，

$$\begin{aligned}|\Delta \mathbf{p}| &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 vs}\int_{\phi(t=-\infty)}^{\phi(t=+\infty)} d\phi\cos\phi \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 vs}\{\sin(\phi(t=+\infty)) - \sin(\phi(t=-\infty))\}\end{aligned} \tag{4.19}$$

図 4.3 より $\phi(t=+\infty) = -\phi(t=-\infty) = (\pi-\theta)/2$ である．よって，

$$\begin{aligned}|\Delta \mathbf{p}| &= \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 vs}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 vs}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned} \tag{4.20}$$

これと，式 (4.14) を比べて，衝突パラメータ s は，

$$s = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \tag{4.21}$$

これより，

$$\begin{aligned}2sds = d(s^2) &= \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2}\right)^2 \frac{-\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}d\theta \\ &= \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2}\right)^2 \frac{1}{2\sin^4(\theta/2)}d\cos\theta\end{aligned} \tag{4.22}$$

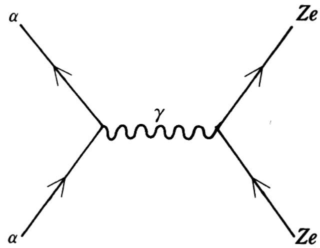


図 4.4　α 粒子と電荷 Ze をもつ原子核の電磁相互作用による散乱を表すファインマンダイアグラム

が得られる．ただし，ここで，$d(\cos\theta) = -2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)d\theta$ を用いた．以上より，ラザフォード散乱の公式

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = 2\pi s\frac{ds}{d\cos\theta} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}} \tag{4.23}$$

が得られる．この公式は，また，次のように変形できる．

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi Z^2}{2}\alpha^2\left(\frac{\hbar c}{T}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}} \tag{4.24}$$

この式の α は，電磁相互作用の結合定数 $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ である．この結果は，図 4.4 のファインマンダイアグラムで表される，α 粒子と原子核がフォトンを交換して散乱する反応を量子論を使って計算したものと等しい．ラザフォード散乱は，点電荷と点電荷の電磁相互作用による散乱である．散乱実験の結果，入射粒子の散乱角度分布が，$1/\sin^4(\theta/2)$ のように分布すれば，それは標的粒子の電荷が点電荷であることを意味している．逆に，散乱角度分布がラザフォードの分布からずれていることがわかれば，それは標的が点ではなく，空間的広がりをもっていることを意味する．

ラザフォードの散乱によって明らかになったことは，運動エネルギー 5.5 MeV の α 粒子にとって原子核は点電荷として見えるということであり，原子核のもつ正電荷の空間的広がりは，α 粒子のド・ブロイ波長 6 fm より十分に小さいということである．

4.2 原子核の構造を探る

原子核の内部構造を知るにはどうしたらよいのであろうか？ それには，ラザフォードの散乱実験より，分解能を向上した実験をする必要がある．分解能をよくするには，入射粒子のエネルギーを上げて粒子のド・ブロイ波長を十分に短くして散乱実験をすればよい．このためには，高エネルギーの電子を使うのが適している．電子は，α 粒子などに比べると容易に加速できるので，高いエネルギーの粒子線（ビーム）をつくるのに適している．また，電子自身は内部構造のない点粒子であり，物質の内部構造を電磁相互作用を使って調べるには最適である．電子ビームを使って原子核の構造を調べる実験は，ホフシュタッター (Hofstadter) らによって，1953 年に始められた．ホフシュタッターは，125 MeV の電子ビームを使って，ラザフォードと同様の散乱実験を行った．その結果，図 4.5 に示すような散乱断面積の角度分布を得た．図で，モット (Mott) 散乱と記した曲線は，点電荷による電

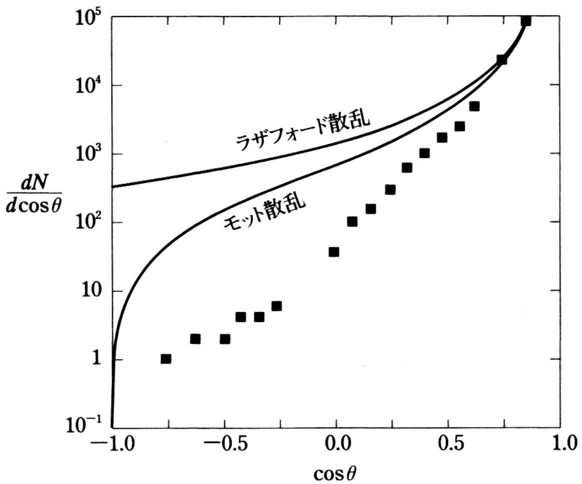


図 **4.5** ホフシュタッターの 125 MeV 電子ビームを使ったラザフォード散乱実験（原子核ターゲット）で得られた散乱断面積の角度分布．くわしくは本文参照．R. Hofstadter *et al.*,*Physical Review* **92** (1953) 978 より転載．

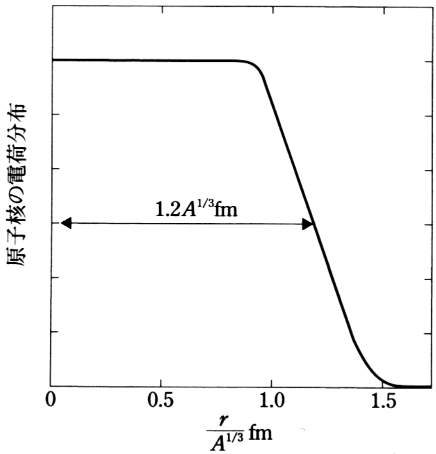


図 4.6　原子核の電荷分布．r は原子核の中心からの距離．A は原子核の質量数（$1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}\ \mathrm{m}$）．

子の散乱を相対論的量子力学を使って計算したもので，ラザフォードの公式との最大の相違は，電子のスピンの効果を取り入れたことにある．実験結果は，原子核が点電荷ではないことを示している．観測された散乱断面積は，散乱角度の大きなところで，点電荷から予想される散乱断面積よりもずっと小さい．これは，高エネルギー電子が，原子核を突き抜け，原子核のもつ全電荷よりも少ない電荷と相互作用したため，点電荷から受ける力よりも小さな力を受けて散乱したことによる．この点電荷分布とのずれから，原子核内の電荷分布を導き出すことができる．その結果，原子核の正電荷は球対称で，中心からの距離とともに図 4.6 のように変化することがわかった．原子核の電荷分布の半径 R は，およそ

$$\boxed{R \approx 1.2A^{1/3}\ \mathrm{fm}} \tag{4.25}$$

で与えられる．A は，原子核の質量数，すなわち，原子核を構成する核子，陽子と中性子の総数である．ここで，R が，電荷をもつ陽子の数である原子番号 Z にあらわに依存せずに，質量数に依存していることに注意してほしい．電荷をもたない中性子も，陽子と同様に，原子核の大きさに寄与しているために，Z でなく A なのである．また，詳細な電子散乱の実験によ

って，原子核の電荷分布は，原子核の表面近傍で，鋭く0になるのでなく，図4.6のように外側にしみ出ていることがわかっている．

4.3 陽子の内部

次に，電子と水素原子核，すなわち陽子の散乱を考えてみよう．電子ビームのエネルギーが低く，電子のド・ブロイ波長が1 fmよりもずっと長いうちは，陽子は点電荷としてふるまい，散乱断面積は，モット散乱の式に従う．が，電子ビームのエネルギーをさらに上げて，電子のド・ブロイ波長を一層短くしていくと何が見えてくるのであろうか？ 電子ビームの波長が1 fm程度になると，その散乱断面積は，原子核標的実験と同様に点電荷の分布からずれ始め，電子が陽子を突き抜けていることがわかる．すなわち，高いエネルギーの電子にとって，陽子は，もはや点電荷ではなく，電荷が空間に分布した大きさのある物体に見えるのである．エネルギーをさらに上げて，電子のド・ブロイ波長が1 fmよりずっと小さなビームを使って実験すると，驚くべき事実が判明する．陽子もまた，いくつかの大きさをもたない点電荷の集まりであることがわかるのである．ファインマンはそれら点電荷をパートンと名づけたが，後に，パートンはクォーク（とグルーオン）に他ならないことがわかる．

陽子の大きさ

電子・原子核散乱実験同様，もし陽子が点電荷でないのならば，散乱断面積の角度分布が点電荷による散乱分布からずれてくる．ただし，このとき，電子同様，陽子もスピンをもっているので，その効果まで考慮したモット散乱の分布と比べる必要がある．図4.7は，エネルギー550 MeVの電子ビームによる電子・陽子散乱実験のデータを陽子のスピンまで考慮したモット散乱分布と比べたものである．この電子のド・ブロイ波長は，$\lambda = hc/pc \approx 1,240\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}/550\ \mathrm{MeV} \approx 2\ \mathrm{fm}$である．散乱角度が大きいところでは，データのほうが，点電荷から予想される断面積より小さいことがわかる．これは，電子が陽子の電荷分布の中に侵入し，陽子が点電荷である場合より

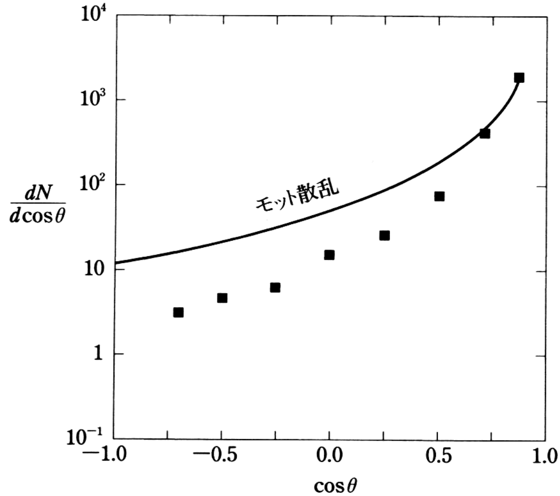


図 4.7　550 MeV 電子ビームによる電子・陽子（水素ターゲット）散乱実験で得られた散乱断面積の角度分布．E. E. Chambers and R. Hofstadter, *Physical Review* **103** (1956) 1454 より転載．

小さな力を受ける結果，その散乱角度が小さくなったからである．このように，電子が標的の電荷分布の中に侵入する場合の断面積は，**形状因子** (form factor) と呼ばれる関数 $F(\theta)$ を使って，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\right)_{\text{proton}} = \left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\right)_{\text{Mott}} [F(\theta)]^2 \tag{4.26}$$

と表すことができる．ここで，$[F(\theta)]^2$ は，1 より小さい．電子が陽子との衝突時に感じる有効電荷は，衝突パラメータの関数であり，さらに，散乱角度 θ と衝突パラメータ s には，式 (4.21) の関係があるので，形状因子もまた散乱角度 θ の関数となる．陽子の電荷分布の情報は，すべてこの形状因子に含まれている．詳細な実験から，陽子の電荷密度 $\rho(r)$ は，$a = 4.27$ fm^{-1} とすると，

$$\rho(r) = \rho(0)\exp(-ar) \tag{4.27}$$

で表されることが明らかになっている．その結果，陽子の電荷分布の平均的な広がりは，

$$\sqrt{<r^2>} = \sqrt{\int r^2 \rho(r) dxdydz} = 0.81 \text{ fm} \tag{4.28}$$

で与えられる．すなわち，陽子は，0.8 fm 程度の広がりをもった粒子である．

陽子の構造

陽子の構造の詳細は，より高いエネルギーの電子ビームを使った電子・陽子散乱実験で明らかになる．フリードマン (Friedman)，ケンドール (Kendall)，テイラー (Taylor) らは，スタンフォード線形加速器センター (SLAC) の 10 GeV 電子ビームを陽子に当ててその散乱を調べた．この電子の波長は，$\lambda \approx 0.1$ fm しかない．その実験結果が示したのは，この波長の電子で調べた陽子の電荷分布は，たくさんの点電荷が集まってできた分布に等しいという事実であった．陽子を構成する大きさをもたない点粒子が，クォークである．高エネルギーの電子と 1 つ 1 つのクォークの衝突は，弾性散乱であり，モット散乱の式で表せる．高エネルギー電子陽子散乱から，どのようにして陽子中のクォークの分布についての情報が得られるかを以下に説明しよう．電子・クォーク散乱は，**深非弾性散乱**と呼ばれ，

$$e^- + p \to e^- + X \tag{4.29}$$

と表される．ここで，X は，電子衝突後の標的陽子で，電子から受け取ったエネルギーから新たな粒子が生成されるために一般には多くの粒子からなる複雑な終状態である．ただし，散乱される電子は電子のままである．散乱前と散乱後の電子のエネルギー E と E'，および散乱角度 θ を測定すると，衝突したクォークが，陽子のもつ運動量のどれだけを担っていたかを決めることができる．このことを示すためには，図 4.8 に示したように，陽子をその質量が無視できるほど大きな運動量をもっている系 S に移して考えるのが便利である．通常の電子・陽子散乱実験では，標的となる陽子は静止しているが，S 系で実験を記述し，特殊相対性理論の知識を使うと問題が簡単になる．S 系では，陽子のエネルギー E_p は，$E_p = \sqrt{(Pc)^2 + (M_p c^2)^2} \approx Pc$ であり（M_p は陽子の質量），陽子の 4 元運動量は，

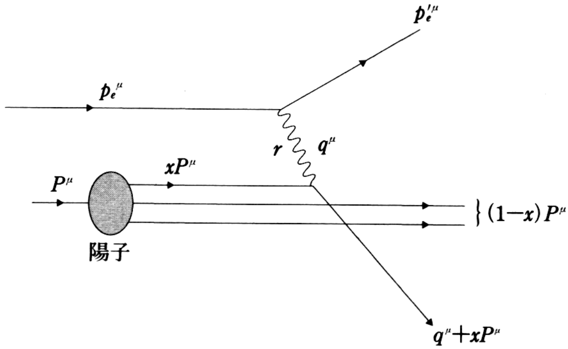


図 4.8 陽子がその質量を無視できるほど高速で走っている系での電子陽子散乱の様子

$$P^\mu = (P, 0, 0, -P) \tag{4.30}$$

で与えられる．1 つのクォークが陽子全体の運動量 P のうち，xP $(0 < x < 1)$ だけを運んでいるとすると，クォークの 4 元運動量は（その質量 m_q が無視できるので）

$$p_q^\mu = (xP, 0, 0, -xP) = x(P, 0, 0, -P) = xP^\mu \tag{4.31}$$

で与えられる．一方，入射電子および散乱電子の 4 元運動量をそれぞれ，p_e^μ と $p_e'^\mu$ で表すと，電子から陽子への 4 元運動量移行 $q^\mu \equiv p_e^\mu - p_e'^\mu$ を定義することができる．ここで，第 3 章の 4 元運動量保存則を用いると，$q^\mu + p_q^\mu$ は，電子と衝突したクォークの全 4 元運動量であるから，

$$(q^\mu + p_q^\mu)(q_\mu + p_{q\mu}) = (m_q c)^2 \approx 0 \tag{4.32}$$

である．この式の左辺を展開すると，

$$\begin{aligned} & q^\mu q_\mu + (q^\mu p_{q\mu} + p_q^\mu q_\mu) + p_q^\mu p_{q\mu} \\ &= q^\mu q_\mu + 2q^\mu p_{q\mu} \\ &= q^\mu q_\mu + 2xq^\mu P_\mu \\ &\approx 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

を得る．ここで，$p_q^\mu q_\mu = q^\mu p_{q\mu}$ および $p_q^\mu p_{q\mu} \approx 0$ を用いた．したがって，

$$x \approx -\frac{q^\mu q_\mu}{2q^\mu P_\mu} \tag{4.34}$$

となる．$q^\mu q_\mu$ も $q^\mu P_\mu$ もローレンツスカラーであるから，x もローレンツスカラーでローレンツ不変な量であることがわかる．そこで，今度は通常の実験室系に移ってそれぞれの量を計算してみよう．実験室系では，陽子は静止しているので，

$$P^\mu = (M_p c, 0, 0, 0)$$

であり，

$$q^\mu = ((E - E')/c, \mathbf{p} - \mathbf{p}') \tag{4.35}$$

である．このとき，

$$q^\mu P_\mu = M_p(E - E'), \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} q^\mu q_\mu &= (E - E')^2/c^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \\ &= 2m_e^2 - 2EE'/c^2 + 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' \\ &\approx -2EE'(1 - \cos\theta)/c^2 \end{aligned} \tag{4.37}$$

ここで，m_e を無視し，$|\mathbf{p}| = E/c$, $|\mathbf{p}'| = E'/c$ の近似を用いた．θ は，$\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ のなす角度，すなわち散乱角度である．陽子の運動量全体のうち，1つのクォークが担っている運動量の割合 x は，

$$x \approx -\frac{q^\mu q_\mu}{2q^\mu P_\mu} = \frac{EE'(1 - \cos\theta)}{(E - E')M_p c^2} \tag{4.38}$$

で与えられる．すなわち，入射電子のエネルギー (E) と陽子の質量 (M_p) の知識，そして散乱電子のエネルギー (E') と散乱角度 (θ) の測定から x が得られることがわかる．

では，x は，どのような分布をしているのであろうか．図 4.9 は，多くの高エネルギー電子陽子散乱実験の結果から得た分布である．この分布の意味することを理解するために次のようなモデルを考えてみよう（図 4.10 参照）．

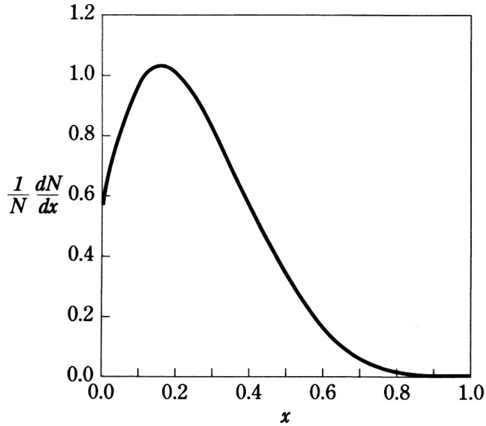


図 4.9　高エネルギー電子陽子散乱実験から得た陽子中のクォーク 1 個が担っている運動量の割合 (x) の分布.

(1) 陽子の中に 1 個のクォークしかない場合：このときは，1 つのクォークが陽子の全運動量を運んでいるので，x の分布は，$x=1$ にピークをもつだけである.

(2) 陽子の中に 3 個のクォークがある場合：3 個のクォーク（これらを価クォーク，valence quark と呼ぶ）が陽子の運動量を等分に担っているはずなので，$x=1/3$ にピークをもつ分布である.

(3) 3 個のクォークがバネで束縛されている場合：クォークを陽子の中に閉じ込めている力は，強い相互作用であり，クォークとクォークは強い相互作用のゲージ粒子であるグルーオンを交換して互いに力をおよぼし合っている．この状態は，クォークとクォークがバネで束縛されているものと考えることができる．このとき，陽子の運動量の 1/3 ずつであったクォークの運動量は再分割されて，x の分布は，約 $x=1/3$ のまわりに広がった分布になることが想像できるであろう．ただし，$x=0$ となる確率は非常に小さいので，x の分布は，$x=0$ で 0 となる.

実験データは，この (3) の分布に似ているが，$x=0$ 近傍でも分布は 0 にならず，非常に小さな運動量をもったクォークの存在を示唆している．このことは，

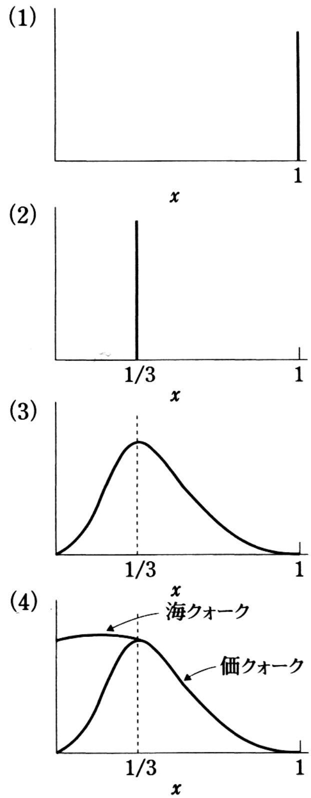


図 4.10 陽子の内部が，(1) 1 個のクォーク，(2) 3 個のクォーク，(3) 束縛された 3 個のクォーク，(4) 束縛された 3 個のクォークとグルーオンから生まれるクォーク・反クォーク対でできている場合，に対応する，1 つのクォークが運んでいる陽子の運動量の割合 (x) の分布．

(4) 3 個のクォークがグルーオンで束縛されていると同時に，クォークから放出されたグルーオンが，クォークと反クォークの対に分岐していると考えると説明することができる．これらのクォークと反クォーク（海クォーク，sea quark) のもつ運動量は非常に小さく，このために x 分布は，$x=0$ においても有限な値をもつ．さらに，これら海クォークが有限な運動量を運んでいるぶんだけ，3 個のクォークの運動量は小さくなるから，x 分布のピークは $x=1/3$ より小さな値となる．

高エネルギーの電子陽子散乱実験の結果は，陽子の中身が (4) のようになっていることを示している．

4.4 クォークに構造はあるか

陽子の構成要素であるクォークに大きさはあるのだろうか？　あるとすれば，その内部構造はどうなっているのだろうか？　この答えを知るためには，散乱粒子のエネルギーをさらに高くして，そのド・ブロイ波長を短くし，ラザフォードの実験をくり返す必要がある．散乱粒子としては，電子やミューオンといった荷電レプトンの他に，非常に高いエネルギーの陽子や反陽子も使うことができる．高エネルギーの陽子や反陽子を散乱粒子として使う場合，実際には，陽子あるいは反陽子中のクォークあるいは反クォークが，標的陽子に含まれているクォークと衝突して散乱する：

$$
\begin{aligned}
&q + q \to q + q, \\
&\overline{q} + q \to \overline{q} + q
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

これらの散乱の散乱角度分布を測ることによって，いままで同様，クォークに構造があるかないかがわかる．その結果，クォークは 10^{-18} m 以上の大きさをもっていないことがわかっている．同様に，電子やミューオンなど荷電レプトンも 10^{-18} m 以上の大きさはない．現在までのところ，どの実験結果も，レプトンとクォークは内部構造をもたない点粒子として扱うことで説明できる．

最後に粒子の内部構造のあるなしが，粒子の大きさにどのような影響を与えるかについて注意しておこう．内部構造をもたない点粒子は，その運動量が p のときド・ブロイ波長 $\lambda = h/p$ で与えられる程度の空間的広がり，すなわち，大きさをもった粒子としてふるまう．逆に，点粒子は運動量に反比例して，どこまでも小さくなっていくと考えることができる．

一方，陽子の大きさを考えてみよう．陽子も 1 fm $= 10^{-15}$ m 程度までは，レプトンやクォークの素粒子同様，運動量に反比例して小さくなっていくと考えてよい．1 fm のド・ブロイ波長を与える運動量は，$p = hc/\lambda c =$

$1,240\ \mathrm{eV\cdot nm}/(1\ \mathrm{fm}\ c) \approx 1\ \mathrm{GeV}/c$である．したがって，$1\ \mathrm{GeV}/c$より大きな運動量をもつ陽子は，1 fm より小さな波長をもつので，陽子の大きさも 1 fm より小さくなるかというと，そうではない．陽子は素粒子と異なり，クォークとグルーオンという構成要素から成り立っている．陽子の大きさを決めるのは，これら構成要素のド・ブロイ波長である．高い運動量をもった陽子の中には，図 4.10(4) の x 分布のように $x = 1$ に近い高い運動量をもったクォークとともに，$x = 0$ 近傍の低い運動量をもったクォークが存在している．それらのクォークのド・ブロイ波長は 1 fm 程度のままである．つまり，陽子の大きさ，サイズは，陽子に含まれるもっともエネルギーの小さいクォークのド・ブロイ波長で決まるといえる．内部構造をもつ粒子の大きさは，構成要素のド・ブロイ波長で決まるのである．これは，ちょうど原子の大きさが，その構成要素である電子の波長で決まっているのと同じである．原子中の内側にある電子の運動量は大きくて，その波長は短いが，外側にある電子の運動量は小さく，そのド・ブロイ波長が原子の大きさ $\approx 10^{-10}$ m を決めていると考えることができる．

第 5 章 ゲージ理論と電弱統一理論

この章では，素粒子の世界を記述する基礎理論と考えられているゲージ理論を紹介する．ゲージ理論は，素粒子の相互作用をゲージ対称性から導き出す．その理論の1つであるワインバーグ・サラム (Weinberg-Salam) 理論は，電磁相互作用と弱い相互作用が，共通のゲージ対称性から導かれることを示し，2つの相互作用を統一することに成功したものである．

5.1 ウィークゲージボゾンの生成

ゲージ理論は，弱い相互作用のゲージボゾン（ウィークゲージボゾン）として，電荷をもった W^+，W^-，そして電荷をもたない Z の3種類の粒子の存在を予言する．これらウィークゲージボゾンは，1983年，ジュネーブ近郊にあるヨーロッパ素粒子原子核研究所 (CERN) の陽子反陽子衝突型加速器を使った実験によって発見された．SP$\bar{\text{P}}$S（エス・ピー・ピーバー・エス）と呼ばれるこの加速器は，W ボゾンや Z ボゾンを発見する目的で，既存の陽子加速器 SPS を改良してつくられたもので，陽子反陽子衝突型加速器の第1号として数多くの成果をあげた．t クォークの発見に使われたテバトロンは，このSP$\bar{\text{P}}$Sの後を継いだものである．テバトロン同様，SP$\bar{\text{P}}$Sでは，それぞれ 270 GeV（1GeV は，10^9 eV）に加速された陽子と反陽子が正面衝突する．このとき，陽子中のクォーク (u, d) と反陽子中の反クォーク $(\bar{u}, \bar{d})$ の衝突によって W ボゾンが生成される．

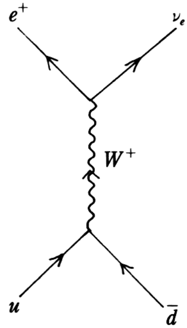


図 5.1　W^+ ボゾンの生成崩壊 $u+\bar{d}\to W^+\to e^+ + \nu_e$ のファインマンダイアグラム

$$u+\bar{d}\to W^+,\qquad d+\bar{u}\to W^- \tag{5.1}$$

生成された W ボゾンを実験で確認するためには，次のような W ボゾンに特徴的な崩壊反応を検出すればよい．

$$W^+\to e^+ + \nu_e,\quad \text{または,}\quad \mu^+ + \nu_\mu,\qquad W^-\to e^- + \overline{\nu_e},\quad \text{または,}\quad \mu^- + \overline{\nu_\mu} \tag{5.2}$$

これらの反応は，終状態に電子あるいはミューオンという荷電レプトンと電荷のないニュートリノしかないという際立った特徴をもっており，W ボゾンとは関係のない他の反応と区別することができる．図 5.1 は，W^+ ボゾンの生成と崩壊の素過程を表すファインマンダイアグラムである．一方，SP$\bar{\text{P}}$S における Z ボゾンの生成反応は

$$u+\bar{u}\to Z,\qquad d+\bar{d}\to Z \tag{5.3}$$

であり，検出に使われた崩壊反応は終状態に電子・陽電子の対か，μ^+ と μ^- の対しかない反応で，これらもまた他の反応と明確に区別できる．

$$Z\to e^+ + e^-,\quad \text{または,}\quad \mu^+ + \mu^- \tag{5.4}$$

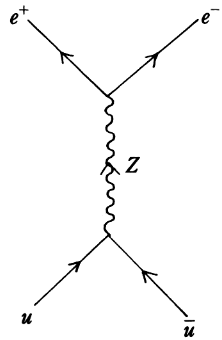


図 **5.2** Z ボゾンの生成崩壊 $u + \bar{u} \to Z \to e^+ + e^-$ のファインマンダイアグラム

図 5.2 に生成崩壊のファインマンダイアグラムを示した．さらに，これらの反応を利用して，$W^\pm$ ボゾンと Z ボゾンの質量を測定することができる．$W^\pm$ ボゾンと Z ボゾンの質量は，それぞれ約 80 GeV/c^2 と 91 GeV/c^2 であり，t クォークをのぞく他のすべてのフェルミオンより重い．

ゲージ理論は，W ボゾンと Z ボゾンの存在をゲージ原理から必然的に導き出す．さらに，ゲージボゾンとクォーク，レプトンとの相互作用についても導き出すことができる．

5.2 グローバル対称性

自然法則の対称性（すなわち，ある操作・変換によって物理量の値や物理法則を表す式の形が変わらないこと）は，物理の理論をつくるうえで重要な手がかりとなる．エネルギー，運動量，角運動量の保存は，それぞれ，物理法則が時間座標の並進，空間座標の並進，そして空間座標の回転によって不変であることから導かれる．すなわち，自然がもつ時間空間座標系での幾何学的対称性を定式化することによって，物理の基本法則を導き出すことができる．

素粒子間の相互作用を表す理論をつくるうえでも，自然のもつ対称性に着目する必要がある．特に，内部対称性と呼ばれる，時空の幾何学的対称性以外の対称性が重要な役割を果たすことがわかっている．内部対称性の例をあ

げてみよう．いくつかの荷電粒子の間に働く電磁相互作用を考える．ある時刻にいっせいに，この系に含まれるすべての荷電粒子の電荷の符号を入れ替えても，荷電粒子間に働く力は不変である．「いっせいに」というのは，すべての4次元時空の点 $x^\mu = (ct, x, y, z)$ において同時にという意味である．つまり，時空のすべての点で，電荷のプラスとマイナスを入れ替えるという変換を行ったわけである．この例のように，4次元時空すべての点でいっせいに行う変換をグローバル (global) 変換といい，グローバル変換についての対称性をグローバル対称性と呼ぶ．

他の内部対称性の例をあげてみよう．陽子と中性子は，強い相互作用に関しては，同様にふるまい，同一の粒子（核子）の異なる状態とみなせることが知られている．スピン 1/2 $(S = 1/2)$ のフェルミオンに，スピン上向き $(S_z = 1/2)$ と下向き $(S_z = -1/2)$ の2つの状態があるように，陽子と中性子は，大きさ 1/2 のアイソスピン $(I = 1/2)$ という内部量子数をもち，陽子は，アイソスピン上向き $(I_3 = 1/2)$，中性子は，アイソスピン下向き $(I_3 = -1/2)$ の状態と表すことができる．強い相互作用は，陽子と中性子の入れ替え，すなわち，上向きのアイソスピンを下向きへ，下向きのアイソスピンを上向きにいっせいに換える変換に対して不変である．これを，強い相互作用のアイソスピン対称性という．これもまた，グローバル対称性である．

弱い相互作用も，ウィークアイソスピンと呼ばれる強い相互作用のアイソスピンによく似た内部量子数をもっている．図5.3に示すように，各世代に属する左巻きクォーク対，たとえば u_L と d_L は，W ボゾンを放出・吸収することによって，互いに相手の状態に変わることができる．同様のことは，左巻きレプトン対についてもいえる．u_L と d_L は，大きさ 1/2 のウィークアイソスピン $(T = 1/2)$ をもつフェルミオンの，それぞれ $T_3 = 1/2$ と $T_3 = -1/2$ の状態であると考えることができるのである．すると，$u_L \to W^+ + d_L$ という反応は，第1世代のクォークが，W^+ を放出して，$T_3 = +1/2$ の状態から $T_3 = -1/2$ の状態へ移ったということができる．フォトンが粒子の電荷に結合するように，W ボゾンは粒子のウィークアイソスピンに結合する．一方，右巻きフェルミオンは，W ボゾンと結合しないこと

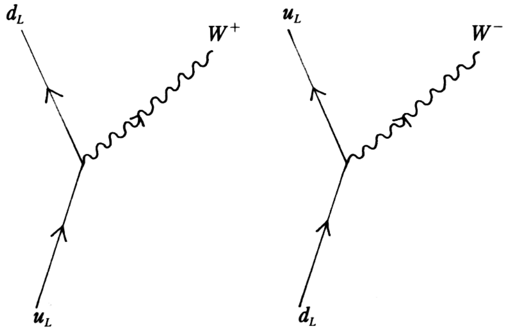


図 **5.3** $u_L \to W^+ + d_L$ と $d_L \to W^- + u_L$ のファインマンダイアグラム

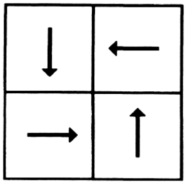
表 **5.1** レプトンとクォークの弱い相互作用に関係した内部量子数

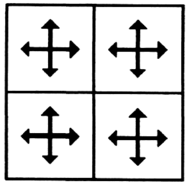
フェルミオン				ウィークアイソスピン		電荷
				大きさ T	第 3 成分 T_3	Q
左巻きレプトン	$\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\nu_{\mu L}\\ \mu_L\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\nu_{\tau L}\\ \tau_L\end{pmatrix}$	1/2	+1/2 −1/2	0 −1
右巻きレプトン	ν_{eR} e_R	$\nu_{\mu R}$ μ_R	$\nu_{\tau R}$ τ_R	0 0	0 0	0 −1
左巻きクォーク	$\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}c_L\\ d_L\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}t_L\\ b_L\end{pmatrix}$	1/2	+1/2 −1/2	+2/3 −1/3
右巻きクォーク	u_R d_R	c_R s_R	t_R b_R	0 0	0 0	+2/3 −1/3

がわかっている．したがって，右巻きフェルミオンは，ウィークアイソスピンをもたず，$T = 0$, $T_3 = 0$ の状態にあると考えられる．弱い相互作用は，左巻きフェルミオンのウィークアイソスピンの第 3 成分をいっせいに入れ替えても（u クォークと d クォークの名前を入れ替えたのと同じなので），相互作用は不変である．すなわち，弱い相互作用は $T_3 = +1/2$ と $-1/2$ の入れ替えというグローバル変換について対称性をもっている．表 5.1 にフェルミオンのウィークアイソスピンと電荷をまとめた．

5.3 ローカル対称性

このグローバル変換を視覚化してみよう．図 5.4 の (a) は，1 枚の伸び縮みするシートの上に書かれた 4 つの正方形の中に矢のパターンを書いたも





(a)　(b)

図 5.4　(a) グローバル対称性と (b) ローカル対称性をもつパターンの例

のである．矢で表現される内部量子数をもった4つの粒子からなる「世界」である．パターンは，原点のまわりにシートを90°（および，その倍数）回転しても変化しない．4つの矢すべてが同時に，同じ向きに，同じ角度回転するのだから，これは，グローバル変換であり，この「世界」は，グローバル対称性をもっているのである．

次に，図5.4(b) のパターンのもつ対称性を考えてみよう．このパターンも，明らかに図5.4(a) 同様のグローバル対称性をもっているが，それ以上の対称性ももっている．それぞれの正方形の中に書かれた矢のペアを任意の時刻に，任意の向きに，90°，180°，270°，⋯ 回転してもパターンは変化しない．図5.4(b) のパターンは，ローカル (local) 対称性をもっているのである．が，このとき，矢の書かれているシートには，何が起こっているのだろうか？　シートには歪みが生じ，それによって，4つの矢のペアの間には，力が働いている．ローカル変換の結果，ペアとペアの間に相互作用が生じたのである．この簡単なモデルと同様に，素粒子のもつある内部量子数にローカル対称性を要求することによって，素粒子間の相互作用を導き出すことができる．以下の節で，このことを定式化していこう．まず準備としてラグランジアンを導入する必要がある．

5.4　ラグランジアン

古典力学のラグランジアン

質量 m をもつ質点に保存力 $\mathbf{F}$ が働いているとき，質点の運動を記述する

ニュートンの運動方程式は，質点のポテンシャルエネルギーを U とすれば，$\mathbf{F} = -\nabla U$ から，

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla U$$

で表される．$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ は，質点の速度である．この運動を，質点のラグランジアン（ラグランジュ関数）

$$L \equiv T - U$$

を導入して記述してみよう．ここで，T は，質点の運動エネルギーで，

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

である．L は，座標 q_i（たとえば，$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$）とその時間微分 $\dot{q}_i(\dot{q}_1 = v_x, \dot{q}_2 = v_y, \dot{q}_3 = v_z)$ の関数である．質点の運動は，オイラー・ラグランジュ (Euler-Lagrange) の方程式で表される：

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)} \tag{5.5}$$

これを使うと，たとえば，$q_1 = x$ について，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial v_x} = mv_x, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

よって，$\frac{d}{dt}(mv_x) = -\frac{\partial}{\partial x}U$ となって，オイラー・ラグランジュの方程式は，ニュートンの運動方程式と等価であることがわかる．

場の理論のラグランジアン

それでは，場の理論におけるラグランジアンはどうなるのであろうか？場の理論においては，位置と時刻の関数 $\phi_i(x^\nu)$，すなわち場を計算することが必要になる（ここで i は異なる場を区別するための指標である）．古典物理によく出てくる ϕ_i の例としては，空間の各点での温度 T，クーロンポテンシャル V，電場 E_x, E_y, E_z，磁場 B_x, B_y, B_z などである．したがって，場の理論においては，ラグランジアン（正確にはラグランジアン密

度[1]）は，場 ϕ_i とその座標微分 $\partial_\mu \phi_i \equiv \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu}$ の関数として与えられる[2]．さらに，オイラー・ラグランジュの方程式は，空間座標と時間座標を対等に扱うように拡張される．

$$\boxed{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)} \tag{5.6}$$

たとえば，$i = 1$ のときをあらわに書くと

$$\partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_1)} \right) + \partial_1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 \phi_1)} \right) + \partial_2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_2 \phi_1)} \right) + \partial_3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \phi_1)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} \tag{5.7}$$

以下に，今後の議論を進めるのに必要な，場の理論における3つの代表的ラグランジアンをあげる．読者は，これらのラグランジアンがどのようにして導出されたのかが気になると思う．しかし，ここでは，先人によって見つけられたラグランジアンがどういう意味をもっているのかを説明するにとどめて，先へ進むことにする．

スカラー場のラグランジアン

場の理論において，スピン0，質量 m をもつ粒子は，（ローレンツ変換でスカラーとしてふるまう）スカラー場で表される．そのスカラー場の運動を記述するラグランジアンが，クライン・ゴルドンのラグランジアンである：

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_0 \phi \partial^0 \phi + \partial_1 \phi \partial^1 \phi + \partial_2 \phi \partial^2 \phi + \partial_3 \phi \partial^3 \phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_1 \phi \partial_1 \phi - \partial_2 \phi \partial_2 \phi - \partial_3 \phi \partial_3 \phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \end{aligned}} \tag{5.8}$$

---

(1) ラグランジアン L とラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は，$L = \int \mathcal{L} dx^1 dx^2 dx^3 = \int \mathcal{L} dx dy dz$ の関係にあるが，今後の議論では，簡単のために，これを無視して $\mathcal{L}$ をラグランジアンと呼ぶことにする．

(2) $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}), \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z})$，式 (3.82) 参照．

ここで ϕ はスカラー場である．オイラー・ラグランジュの方程式を使うと，$\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi$，$\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)} = -\partial_i\phi = \partial^i\phi$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -(\frac{mc}{\hbar})^2\phi$ より，

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi = 0 \tag{5.9}$$

が得られる．これを，スピン 0，質量 m の粒子の運動を表すクライン・ゴルドン方程式という．

スピノル場のラグランジアン

次に電子のようなスピン 1/2，質量 m の自由空間（すなわち，電場，磁場のない空間）におけるフェルミオンの運動を表すディラック・ラグランジアンを紹介しよう．ディラック・ラグランジアンは，

$$\boxed{\mathcal{L} = i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi} \tag{5.10}$$

で表され，ψ は，3.5 節に出てきた，電子の相対論的波動関数，ディラックスピノルである：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$\overline{\psi}$ は，$\overline{\psi} \equiv (\psi_1^*\ \ \psi_2^*\ \ -\psi_3^*\ \ -\psi_4^*) = \psi^\dagger\gamma^0$ で定義される 1 行 4 列の行列で，共役スピノルと呼ばれる．また，γ^μ $(\mu = 0,1,2,3)$ は，4 行 4 列のガンマ行列である．$\phi = \overline{\psi}$ として，オイラー・ラグランジュ方程式を適用すると，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = i(\hbar c)\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (mc^2)\psi$ より，ディラック方程式（式 (3.97) 参照）

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

が得られる．

ベクトル場のラグランジアン

スピン 1，質量 m の粒子の運動を記述するラグランジアンは，4 元ベクトルであるベクトル場 A^μ を使って，

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \tag{5.11}$$

と与えられる．これを，プロカ (Proca)・ラグランジアンと呼ぶ．このラグランジアンに，オイラー・ラグランジュの方程式を適用する．$\phi = A_\nu$ とすると，$\frac{\partial}{\partial_1 A_2}\{(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)\{(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) + (\partial^2 A^1 - \partial^1 A^2)(\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2)\}\} = 4 \times (\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)$（ここで，$\partial^1 A^2 = \partial_1 A_2$ を使った）などより，$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{-1}{4\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$，さらに，$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi}(\frac{mc}{\hbar})^2 A^\nu$ だから，

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0$$

を得る．ここで，テンソル $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ を導入すると，プロカ・ラグランジアンとベクトル場の運動方程式は，それぞれ，

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu} \tag{5.12}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \tag{5.13}$$

で与えられる．

5.5　$U(1)$ ゲージ理論

ゲージ変換

さて，これまでに導入した 3 つのラグランジアンには，粒子間の相互作用が含まれていない．すなわち，これらのラグランジアンは相互作用のない自由場のラグランジアンである．われわれがほしいのは，相互作用を記述するラグランジアンなのであるから，もちろん，このままでは物足りない．5.3 節で，素粒子の内部量子数にローカル対称性を要求すると，素粒子間の

相互作用を導き出せると説明した．このことを，ラグランジアンを使って表現してみよう．この節では，ローカル対称性から相互作用が導かれる例として電磁相互作用を取り上げる．電場，磁場の存在していない自由空間での電子の運動を表すディラック・ラグランジアン $\mathcal{L} = i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi$ は，次のグローバル変換で不変である．

$$\boxed{\psi \to \exp(i\theta)\psi} \tag{5.14}$$

ここで，θ は，任意の実数である．この変換は，スピノル場の位相を 4 次元時空すべての点で共通に，θ だけ回転させるグローバル位相変換である．これを，歴史的理由から，グローバルゲージ変換と呼ぶ．このとき，$\overline{\psi} \to \exp(-i\theta)\overline{\psi}$ だから，$\overline{\psi}\psi$ は不変であり，ラグランジアンもまた不変である．ここで，もしこの θ に時間と場所による依存性をもたせたらどうなるだろう？　すなわち，θ を定数ではなく x^ν の実関数として，$\theta = \theta(x^\nu)$，

$$\boxed{\psi \to \exp(i\theta(x^\nu))\psi} \tag{5.15}$$

という変換を考える．この変換をローカルゲージ変換という．この変換は，グローバル変換とは異なり，スピノル場の位相を 4 次元時空のどこの点においても他の点と独立に（勝手に）回転させていい変換である．ラグランジアンは，このローカルゲージ変換で不変であり得るだろうか？　θ は関数だから微分 $\partial_\mu \theta(x^\nu)$ が消えないことに注意すると，

$$\partial_\mu \psi \to \partial_\mu(\exp(i\theta(x^\nu))\psi) = \exp(i\theta(x^\nu))\partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \theta(x^\nu))\exp(i\theta(x^\nu))\psi$$

であるから，

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \hbar c(\partial_\mu \theta(x^\nu))\overline{\psi}\gamma^\mu \psi$$

となって，ラグランジアンが不変にならない．この $\partial_\mu \theta(x^\nu)$ に比例する項が，5.3 節の「ローカル変換によって生じたシートの歪み」に他ならない．自由場のディラック・ラグランジアンは，ローカルゲージ変換で不変でないのである．だからといって何も新しいことは起こらないではないか，と思うかもしれない．しかし，ここで考えを逆転して，場を記述するラグランジア

ンは，ローカルゲージ変換で不変であるべきだとしてみよう．ローカルゲージ対称性を物理の原理とみなしてみるのである．

自由場のディラック・ラグランジアンは，ローカルゲージ対称性をもたないのだから，対称性をもたせるためには，歪みを打ち消すための新たな「何か」を導入して，ラグランジアンを変更する必要がある．この新たな「何か」もまた場であり，これをゲージ場と呼ぶ．ここで，ゲージ場 $A_\mu(x^\nu)$ を導入して微分を次のように変更しよう．

$$\boxed{\partial_\mu \Rightarrow \mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu} \tag{5.16}$$

この微分を共変微分と呼ぶ．ここで，q は，電子の電荷で，$q = -e$（e は，素電荷 1.6×10^{-19}C）である．ゲージ場 $A_\mu(x^\nu)$ は，ローカルゲージ変換で，

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{\hbar c}{q}\partial_\mu \theta(x^\nu) \tag{5.17}$$

と変換することを要請する．いま，位相 $\theta(x^\nu)$ は任意の実関数であるから，電子の電荷の大きさに比例した関数と定義し直すことができる：

$$\theta(x^\nu) = q\Lambda(x^\nu)$$

このとき，ゲージ場は，

$$\boxed{A_\mu \to A_\mu - \hbar c\partial_\mu \Lambda(x^\nu)} \tag{5.18}$$

と変換される．すると共変微分は，ローカルゲージ変換で，

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu\psi &\to \left[\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}\{A_\mu - \hbar c\partial_\mu\Lambda(x^\nu)\}\right]\exp(iq\Lambda(x^\nu))\psi \\
&= \exp(iq\Lambda(x^\nu))\left(\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu\right)\psi \\
&= \exp(iq\Lambda(x^\nu))\mathcal{D}_\mu\psi
\end{aligned}$$

と変換されるから，変更後のラグランジアン $\mathcal{L} = i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi$ は，ローカルゲージ変換で不変となる．このラグランジアンは

$$\boxed{\mathcal{L} = \{i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi\} - (q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu} \tag{5.19}$$

と書き直すことができる．ラグランジアンの第 3 項，$-(q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu$ は，ゲージ場 A_μ とスピノル場 ψ が，結合定数 $-q$ の強さで相互作用することを意味している．ψ が電子であることを思い出すと，ローカルゲージ対称性の要求は，電子と相互作用するゲージ粒子，すなわち，フォトンの存在を導き出し，さらに，電子とフォトンの結合の強さは，$-q = e$ であることを示している．ローカルゲージ対称性が，電子とフォトンの相互作用，すなわち，電磁相互作用を導き出したのである．

次に，一般に電荷 Q のフェルミオンの電磁相互作用を導いてみよう．このとき，粒子場のゲージ変換として

$$\psi \to \exp(iQ\Lambda(x^\nu))\psi, \tag{5.20}$$

すなわち，粒子のもつ電荷の大きさに比例した位相変換を考える．共変微分は式 (5.16) 同様，

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i\frac{Q}{\hbar c}A_\mu \tag{5.21}$$

となる．このとき，ゲージ場（フォトン）の受けるゲージ変換 (5.18) に変更はなく，粒子のもつ電荷の大きさによらないことに注意しよう．変更後のゲージ不変なラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = \{i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi\} - (Q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu \tag{5.22}$$

となり，フォトンと電荷 Q のフェルミオンの結合の強さが，$-Q$ であることがわかる．

ローカルゲージ不変性を要求することによって導入されたゲージ場は，式 (5.18) からわかるように，スカラー関数 $\Lambda(x^\nu)$ の微分 $\partial_\mu\Lambda(x^\nu)$ と同様，ローレンツ変換によってベクトルとして変換する必要がある．つまり，ゲージ場はベクトル場であり，スピン 1 の粒子を表している．ローカルゲージ対称性をディラック・ラグランジアンに要請することによって電磁相互作用のゲージボゾンであるフォトンの存在が必然的に導かれたわけである．

フォトンの質量

前節のゲージ不変なラグランジアンは，電子（荷電フェルミオン）の運動を表す項と電子とフォトンの相互作用を表す項を含んでいることがわかった．しかし，これだけでは，まだ完全なラグランジアンではない．なぜなら，フォトンの運動を表す項が欠けているからである．フォトンの場は，スピン1のベクトル場であるから，プロカ・ラグランジアン $\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}(\frac{m_A c}{\hbar})^2 A^\nu A_\nu$ で表される．このラグランジアンの，ローカルゲージ変換での変換性を調べてみよう．$A_\nu \rightarrow A_\nu - \hbar c\partial_\nu\Lambda$ の変換で，$\partial_\mu A_\nu \rightarrow \partial_\mu A_\nu - (\hbar c)\partial_\mu\partial_\nu\Lambda$ となり，かつ，$\partial_\mu\partial_\nu\Lambda = \partial_\nu\partial_\mu\Lambda$ だから，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は不変である．しかしながら，質量項 $\frac{1}{8\pi}(\frac{m_A c}{\hbar})^2 A^\nu A_\nu$ は，明らかに不変にならない．つまり，ローカルゲージ対称性を要求すると，ゲージボゾンの質量項は存在できないことになり，ゲージボゾンの質量は0でなければならないことが導かれる．フォトンの質量は0でなくてはならない．これは，まさに，電磁相互作用のゲージボゾンであるフォトンに質量はないという事実を説明しているのである．

ここまでの話は，現代の素粒子物理を理解するうえできわめて重要であるので，ここで要約しておく．ディラック・ラグランジアンに，ローカルゲージ対称性を要求することによって，質量0のゲージ場（フォトン）の存在と，電子とフォトンの相互作用（電磁相互作用）を導き出すことができた．これをゲージ原理という．このシステムを記述する完全なラグランジアンは，

$$\boxed{\mathcal{L} = \{i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi\} - (q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} \tag{5.23}$$

で与えられる．5.3節の「シートの歪み」は，ゲージ場によって修復されたのである．

$U(1)$ 群

電磁相互作用のゲージ変換は，複素数の位相回転であり，2つの変換を連続して行っても，やはりゲージ変換である：

$$\exp(i\theta_2)\exp(i\theta_1)\psi = \exp(i(\theta_1 + \theta_2))\psi$$

このように，かけ算の定義されている集合のことを群という[(3)]．群に含まれる要素は一般に行列で表すことができる．電磁相互作用のゲージ変換は，そのもっとも簡単な場合で，1行1列の行列と考えることができ，$U(1)$ 群をなしているという．電磁相互作用は，$U(1)$ ゲージ対称性から導かれたゲージ理論ということになる．

標準理論では，すべての相互作用がゲージ原理から導かれる．各相互作用がもっているゲージ対称性を見つけ出して，ゲージ原理を適用してやればよいのである．ただし，弱い相互作用や強い相互作用の場合，自然が選んだゲージ対称性は，$U(1)$ ゲージ対称性ほど単純なものではない．

5.6 ワインバーグ・サラム理論

$SU(2)$ ゲージ理論

5.2節で述べたように，同じ世代に属する左巻きのフェルミオン対は，W ボゾンを放出・吸収することによって互いに相手の状態に変わることができる．弱い相互作用は，左巻きのフェルミオン対に関して対称な相互作用といえる．これをウィークアイソスピン対称性と呼ぶ．この対称性をローカルな対称性にしたらどうなるのだろうか？　今日，素粒子の標準理論と呼ばれているものの根幹をなすワインバーグ・サラム理論は，ここから始まる．

以下で，フェルミオンの対のような，2重項の対称性を扱うことのできるもっとも簡単な変換を考えることにする．2つのフェルミオンの場（スピン1/2の場）を ψ_1, ψ_2 と書いてみよう（ψ_1 と ψ_2 は，それぞれディラックの4成分スピノルであるが，スピノルの足1, 2, 3, 4は省くことにする）．相互作用のないときのラグランジアンは，1つの粒子に対するディラック・ラグランジアンの和で表される：

(3) 付録B参照．

$$\mathcal{L} = \{i\hbar c\overline{\psi_1}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_1 - m_1c^2\overline{\psi_1}\psi_1\} + \{i\hbar c\overline{\psi_2}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 - m_2c^2\overline{\psi_2}\psi_2\} \tag{5.24}$$

ここで，次のような2成分の列ベクトルを導入して，このラグランジアンをもう少し見やすく書き直す．

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

共役スピノルは，

$$\overline{\psi} = (\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2})$$

であり，ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - c^2\overline{\psi}M\psi \tag{5.25}$$

ここで，M は，2行2列の行列

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

である．2つのフェルミオンの質量が等しいときは $(m_1 = m_2 = m)$，ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\overline{\psi}\psi \tag{5.26}$$

となり，1粒子に対するディラック・ラグランジアンと見かけは同じになる．まず，このラグランジアンのもっているグローバルな対称性を見てみよう．ψ_1 と ψ_2 は，複素数の関数であり，これらが対称で区別できないということは，2つの複素数の間の回転でラグランジアンが不変であるということである．この変換を2行2列の行列 U で表すと，

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

ただし，$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1'|^2 + |z_2'|^2$ だから，

$$\sum_{i=1}^{2} u_{ij}^* u_{ik} = \delta_{jk} \tag{5.27}$$

でなければならない．ここで u_{ij}^* は u_{ij} の複素共役である．行列 U の各成分の複素共役をとり，行と列を入れ換えて（転置して）得られる行列を，行列 U のエルミート共役と呼び，$U^\dagger$ で表すことにすると（$(U^\dagger)_{ij} = U_{ji}^*$），条件 (5.27) より，

$$U^\dagger U = UU^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

が導ける．すなわち，U のエルミート共役が，U の逆行列になっている（$U^{-1} = U^\dagger$）．このような行列をユニタリ行列と呼ぶ（付録Bも参照）．いま，ψ に次のグローバル変換をほどこす．

$$\psi \to U\psi \tag{5.29}$$

このとき，共役スピノルは，

$$\overline{\psi} \to \overline{\psi} U^\dagger \tag{5.30}$$

のように変換するから，$\overline{\psi}\psi$ は，

$$\overline{\psi}\psi \to (\overline{\psi}U^\dagger)(U\psi) = \overline{\psi}(U^\dagger U)\psi = \overline{\psi}\psi$$

となり，この変換で不変である．

絶対値1の任意の複素数が，$\exp(i\theta)$（θ は実数）で表せるように，任意のユニタリ行列は，H をエルミート行列（$H^\dagger = H$ の成り立つ行列）とすると，$\exp(iH)$ の形に書けることがわかっている．ここで，行列 A の指数関数 $\exp(A)$ は $\exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ で定義される．さらに，2行2列のエルミート行列は，$\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を実数とすると，

$$H = \theta E + \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \lambda_3 \tau_3$$

で表されることが知られている．ここで，E は2行2列の単位行列，τ_1, τ_2, τ_3 は，3.5節で述べたパウリ行列である：

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

したがって，任意の 2 行 2 列のユニタリ行列は，

$$\begin{aligned} U &= \exp(iH) = \exp\{i(\theta E + \lambda_1\tau_1 + \lambda_2\tau_2 + \lambda_3\tau_3)\} \\ &= \exp(i\theta E)\exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}) \\ &= \begin{pmatrix} \exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(i\theta) \end{pmatrix} \exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}) \\ &= \exp(i\theta)\exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}) \end{aligned} \tag{5.32}$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{\lambda}$ と $\boldsymbol{\tau}$ は，それぞれ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ と (τ_1, τ_2, τ_3) というベクトルであることに注意しよう．こうして，変換 U は，前節の $U(1)$ 群をなす位相変換 $\exp(i\theta)$ と，2 行 2 列の行列 $\exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau})$ の積[(4)]で表現することができる．$\exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau})$ もまた群をなし，その群を $SU(2)$ と呼ぶ[(5)]．

さて，$U(1)$ ゲージ対称性から，ゲージ場フォトンの存在と，フォトンと荷電フェルミオンとの相互作用が導かれることがわかっているので，次に，$SU(2)$ ゲージ対称性から何が導かれるのかを考察してみよう．ラグランジアン (5.25) は，グローバルゲージ変換 $\psi \to U\psi = \exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau})$ で不変であるが，$\boldsymbol{\lambda}$ を x^ν に依存する変数にして，ローカルゲージ変換にしてみよう．すると，電磁相互作用のときと同様に，このままではラグランジアンが不変にならない．なぜなら

$$\partial_\mu\psi \to U\partial_\mu\psi + (\partial_\mu U)\psi \tag{5.33}$$

となるからである．そこで，$U(1)$ ゲージ変換におけるゲージ場（すなわち，

(4) 群 A の要素 a と群 B の要素 b から，対 (a, b) をつくる．このような対全体の集合は，積の演算 $(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) \equiv (a_1\cdot a_2, b_1\cdot b_2)$ によって群をなす．この対全体の集合を $A \otimes B$ と書いて，群 A と群 B の直積群と呼ぶ．

(5) U 自身も群をなす．これを，群論の言葉で表現すれば，U は，$U(1)$ 群と $SU(2)$ 群の直積群 $U(2)$ 群をなすといい，$U(2) = U(1) \otimes SU(2)$ と表す．付録 B も参照．

フォトン）に相当するベクトル場を導入して共変微分を定義しよう．ただし，今回は，$W_{1\mu}, W_{2\mu}, W_{3\mu}$ の3つのベクトル場が必要である：

$$\boxed{\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{g}{\hbar c}(W_{1\mu}\tau_1 + W_{2\mu}\tau_2 + W_{3\mu}\tau_3) = \partial_\mu + i\frac{g}{\hbar c}\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}} \tag{5.34}$$

ここで，$\mathbf{W}_\mu$ は，$\mathbf{W}_\mu \equiv (W_{1\mu}, W_{2\mu}, W_{3\mu})$ という（ベクトルの）ベクトルである．g（実数）は，電子とフォトンとの相互作用の強さである電荷に相当する，フェルミオンとベクトル場 $\mathbf{W}_\mu$ との相互作用の強さを表す結合定数である．g は，$W_{1\mu}, W_{2\mu}, W_{3\mu}$ に共通な1つの定数であることに注意しよう．ベクトル場 $\mathbf{W}_\mu$ は，$\mathcal{D}_\mu\psi \to U(\mathcal{D}_\mu\psi)$ が成り立つように変換されなければならない：

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_\mu + i\frac{g}{\hbar c}\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}\right)\psi \\
&\to \left(\partial_\mu + i\frac{g}{\hbar c}\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}\right)U\psi \\
&= U\partial_\mu\psi + (\partial_\mu U)\psi + i\frac{g}{\hbar c}\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}U\psi \\
&= U\left[\partial_\mu\psi + U^{-1}(\partial_\mu U)\psi + i\frac{g}{\hbar c}U^{-1}\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}U\psi\right]
\end{aligned} \tag{5.35}$$

したがって必要な変換性は，

$$U^{-1}(\partial_\mu U) + i\frac{g}{\hbar c}U^{-1}\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}U = i\frac{g}{\hbar c}\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}$$

である．$U^{-1} = U^\dagger$ であることに注意すると，$\mathbf{W}_\mu$ は，

$$\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\tau} = U\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}U^{-1} + i\frac{\hbar c}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{5.36}$$

$$= U\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}U^\dagger + i\frac{\hbar c}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \tag{5.37}$$

というゲージ変換を受ければよい．

一見複雑そうに見えるが，$\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}$ のかわりに A_μ として，$U = \exp(i\theta)$ とおくと，$A'_\mu = A_\mu - \frac{\hbar c}{g}\partial_\mu\theta$ となって，電磁相互作用のゲージ場の変換と同じであることがわかる．ここでは，$\lambda = |\boldsymbol{\lambda}|$ が，非常に小さいとき（これを無限小変換と呼ぶ）を考えてみよう：$U \approx E + i\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau}$．このとき，$U^\dagger = U^{-1} \approx E - i\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau}$, $\partial_\mu U \approx i\partial_\mu\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau}$ だから，λ についての1次の項まで考えると，

$$\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + i(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau})(\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}) - i(\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau}) + i\frac{\hbar c}{g}(i\partial_\mu \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau})$$

となる．ここで，パウリ行列に関する公式

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{5.38}$$

を使うと，

$$\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau} - 2(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{W}_\mu) \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{\hbar c}{g}\partial_\mu \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

となり，

$$\mathbf{W}'_\mu = \mathbf{W}_\mu - 2(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{W}_\mu) - \frac{\hbar c}{g}\partial_\mu \boldsymbol{\lambda} \tag{5.39}$$

が得られる．この変換を，電磁相互作用の場 A_μ の受けるゲージ変換 (5.18) 式と比べると，$\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{W}_\mu$ に比例する項が余分に出てきたことがわかる．これは，2 行 2 列の行列が一般に互いに交換可能でないことからきている．一方，1 行 1 列の行列は，もちろん交換可能である．これを群論の言葉で言い直すと，$U(1)$ ゲージ変換が可換（アーベル）群 (Abelian group) であるのに対し，$SU(2)$ ゲージ変換は非可換（非アーベル）群 (non-Abelian group) であるという（付録 B 参照）．非可換群のゲージ理論のほうが，可換群のゲージ理論よりも複雑な形をしているのである．

得られたラグランジアンを書き直すと，

$$\mathcal{L} = i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - c^2\overline{\psi}M\psi \tag{5.40}$$

$$= \{i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - c^2\overline{\psi}M\psi\} - g\overline{\psi}\gamma^\mu(\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau})\psi \tag{5.41}$$

このラグランジアンの第 3 項 $-g\overline{\psi}\gamma^\mu(\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau})\psi$ は，$U(1)$ ゲージ理論同様，ゲージ場とフェルミオン対の場が，結合定数 $-g$ の強さで相互作用することを表す部分である．以後，$\mathcal{L}_{\rm int}$ と書く．ここで，さらに，$SU(2)$ 行列を含む部分を書き直すと，

$$\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} W_{3\mu} & W_{1\mu} - iW_{2\mu} \\ W_{1\mu} + iW_{2\mu} & -W_{3\mu} \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

となる．さらに，

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} \mp iW_{2\mu}) \tag{5.43}$$

と定義する．たとえば，ψ として，$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ を選ぶと，$\mathcal{L}_{\rm int}$ は，

$$\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} W_{3\mu} & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_{3\mu} \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

であることに注意して，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rm int} =& -g\sqrt{2}\{(\overline{u_L}\gamma^\mu d_L)W_\mu^+ + (\overline{d_L}\gamma^\mu u_L)W_\mu^-\} \\ & -g\{(\overline{u_L}\gamma^\mu u_L) - (\overline{d_L}\gamma^\mu d_L)\}W_{3\mu} \end{aligned} \tag{5.45}$$

と書くことができる．ここで現れた $W_\mu^\pm$ が，CERN で発見された W ボゾンに対応する場である．このラグランジアンから，左巻きの d クォークは，W^+ ボゾンを吸収して左巻きの u クォークになり，逆に，左巻きの u クォークは，W^- ボゾンを吸収して，左巻きの d クォークになることがいえる．さらに，クォークと $W^\pm$ の結合の強さは，$-g$ であることがわかる．$\psi = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rm int} =& -g\sqrt{2}\{(\overline{\nu_{eL}}\gamma^\mu e_L^-)W_\mu^+ + (\overline{e_L^-}\gamma^\mu \nu_{eL})W_\mu^-\} \\ & -g\{(\overline{\nu_{eL}}\gamma^\mu \nu_{eL}) + (\overline{e_L^-}\gamma^\mu e_L^-)\}W_{3\mu} \end{aligned} \tag{5.46}$$

このときも，結合の強さは $-g$ である．つまり，$W^\pm$ とクォーク，レプトンは同じ強さで相互作用することが，このラグランジアンからいえるのである．これは，ユニバーサリティ (universality) と呼ばれ，弱い相互作用のもつ重要な特徴の 1 つである．

3 番目のベクトル場 $W_{3\mu}$ は，何であろうか？ $W_\mu^\pm$ と異なり，相互作用する左巻きのフェルミオンの電荷を変えない．それでは，フォトンなのだろうか？ しかし，左巻きのフェルミオンとだけしか結合しない．しかも，電荷をもたないニュートリノとも結合するのでフォトンではあり得ない．さら

に，$SU(2)$ ゲージ変換によって，電荷の異なるフェルミオンが混ざり合うとすると，電磁相互作用をつくり出す $U(1)$ ゲージ変換（粒子の電荷に比例した位相変換）と $SU(2)$ ゲージ変換を独立に行うことができなくなる．つまり，電磁相互作用と弱い相互作用を独立した別の相互作用ではなく，互いに関連した相互作用として統一的に扱わないとつじつまがあわなくなるのである．この統一を実現したのが，ワインバーグ・サラム理論である．

さて，フォトン同様，$W_{1\mu}, W_{2\mu}, W_{3\mu}$ のそれぞれはベクトル場であるから，ラグランジアンを完成するには，これらの運動を表すプロカ・ラグランジアンを加える必要がある．ただし，電磁相互作用と異なり，$SU(2)$ 群が非可換群であることから，$F^{\mu\nu}$ テンソルがそのままではゲージ不変でないため，次のような変更を受けなくてはならない．ベクトル場は 3 つあるので，

$$\begin{aligned} F_1^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu - \frac{2g}{\hbar c}(W_2^\mu W_3^\nu - W_3^\mu W_2^\nu), \\ F_2^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu - \frac{2g}{\hbar c}(W_3^\mu W_1^\nu - W_1^\mu W_3^\nu), \\ F_3^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu W_3^\nu - \partial^\nu W_3^\mu - \frac{2g}{\hbar c}(W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu) \end{aligned} \tag{5.47}$$

これらは，$\mathbf{W}^\mu \equiv (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu)$ であることに注意すると，

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu - \frac{2g}{\hbar c}(\mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu) \tag{5.48}$$

とまとめることができる．この $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ を使うとプロカ・ラグランジアン中の $-\frac{1}{16\pi}\mathbf{F}^{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu}$ はゲージ不変となる．一方，電磁相互作用同様，ゲージ場の質量項，

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_1 c}{\hbar}\right)^2 W_1^\mu W_{1\mu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_2 c}{\hbar}\right)^2 W_2^\mu W_{2\mu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_3 c}{\hbar}\right)^2 W_3^\mu W_{3\mu} \tag{5.49}$$

は，ゲージ不変にならない．したがって，フォトン同様，W ボゾンの質量は 0 でなければならない！　ところが，このことは，明らかに実験事実と反する．W ボゾンの質量は約 80 GeV/c^2 と重いのである．このゲージボゾンの質量の起源を説明するのに考え出されたモデルが，ヒッグス (Higgs) 機

構と呼ばれるものである．これについては，次章で説明する．ワインバーグ・サラム理論は，電磁相互作用と弱い相互作用を統一して扱うラグランジアンとヒッグス機構からなるが，次項で，まず，ワインバーグ・サラム・ラグランジアンについて説明する．

ワインバーグ・サラムのラグランジアン

弱い相互作用と電磁相互作用を統一するためには，2つの相互作用を1つのラグランジアンから導き出す必要がある．すなわち，3つのウィークゲージボゾンとフォトン，合計4つのゲージボゾンを1つのラグランジアンから導き出す必要がある．$SU(2)$ ゲージ変換からは3つ，$U(1)$ ゲージ変換からは1つのゲージボゾンが出てくるので，4つのゲージボゾンが出てくるもっとも簡単なゲージ変換は，$SU(2)$ と $U(1)$ の直積からなるゲージ変換であることは予想がつくだろう．そこで，まず，前節のように，$SU(2)$ 変換を，ウィークアイソスピン二重項の回転としてみよう．たとえば，u_L と d_L をウィークアイソスピン空間で混ぜる．次は，$U(1)$ ゲージ変換であるが，二重項に属している左巻きのフェルミオンには共通の位相変換を行いたい．つまり，u_L と d_L に同一の位相変換を行いたい．ところが，u_L と d_L の電荷の大きさが異なるので，$U(1)$ を電荷に対応する位相変換とするわけにはいかない．そこで，フェルミオンが，何か別の（電荷によく似た）量子数をもっていて，u_L と d_L のように二重項をなすフェルミオンは共通の値をもっていると仮定する．いま，その量子数を，とりあえず Y と書いておき，電荷と同じように，Y に比例する $U(1)$ 位相変換 $\exp(iY\Lambda)$ を考えることにする．

以下では，簡単のために第1世代のクォーク (u,d) だけについてのラグランジアンを考える：

$$\boxed{\psi_1 = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = u_R, \quad \psi_3 = d_R} \tag{5.50}$$

左巻きのクォークは，二重項をなし $SU(2)$ 変換を受けるが，右巻きのクォークは，一重項であり，$SU(2)$ 変換で不変である．レプトン対について

考えるときは，

$$\boxed{\psi_1 = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \nu_{eR}, \quad \psi_3 = e_R} \tag{5.51}$$

と置き換えればよい[6]．相互作用のないときのクォークあるいはレプトンのラグランジアンは，

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{j=1}^{3} (i\hbar c)\overline{\psi_j}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j \tag{5.52}$$

で与えられる．$\mathcal{L}_0$ は，次のグローバルゲージ変換 G で不変である．

$$\begin{aligned} \psi_1 &\xrightarrow{G} \psi_1' \equiv \exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau})\exp(iY_1\Lambda)\psi_1, \\ \psi_2 &\xrightarrow{G} \psi_2' \equiv \exp(iY_2\Lambda)\psi_2, \\ \psi_3 &\xrightarrow{G} \psi_3' \equiv \exp(iY_3\Lambda)\psi_3 \end{aligned} \tag{5.53}$$

$SU(2)$ の行列は，二重項の場 ψ_1 のみにかかることに注意しよう．この変換 G を $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ と呼ぶ．

次に，ラグランジアンが，ローカルゲージ変換に対しても不変であることを要請しよう．$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(x^\nu)$, $\Lambda = \Lambda(x^\nu)$ とする．このとき，必要な共変微分は，$U(1)$ ゲージ理論と $SU(2)$ ゲージ理論についての議論から，

$$\boxed{\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{g}{\hbar c}\mathbf{W}_\mu \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} + i\frac{g'}{\hbar c}\frac{Y_j}{2}B_\mu} \tag{5.54}$$

であることがわかる[7]．ここで，$\mathbf{W}_\mu = (W_{1\mu}, W_{2\mu}, W_{3\mu})$，$B_\mu$ という 4 つのベクトル場，すなわちゲージ場を導入した．ただし，$\mathbf{W}_\mu \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}$ は，ψ_1 にのみ作用する．これらと，3 つのウィークボゾンとフォトンとの対応がつくであろうか？　変更後のラグランジアンは，

(6) ただし，ν_{eR} の存在を示す実験事実はなく，ワインバーグ・サラム理論では ν_{eR} は含まれていない．

(7) $\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}$ と $\frac{Y_j}{2}$ の $\frac{1}{2}$ は，後の議論の便宜のためについている．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{j=1}^{3}(i\hbar c)\overline{\psi_j}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_j \\
&= \sum_{j=1}^{3}(i\hbar c)\overline{\psi_j}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j \\
&+ (i\hbar c)\overline{\psi_1}\gamma^\mu \left\{ i\frac{g}{\hbar c}\left(W_{1\mu}\frac{\tau_1}{2} + W_{2\mu}\frac{\tau_2}{2} \right) \right\} \psi_1 \\
&+ (i\hbar c)\overline{\psi_1}\gamma^\mu \left(i\frac{g}{\hbar c} W_{3\mu}\frac{\tau_3}{2} \right) \psi_1 + \sum_{j=1}^{3}(i\hbar c)\overline{\psi_j}\gamma^\mu \left(i\frac{g'}{\hbar c}\frac{Y_j}{2}B_\mu \right) \psi_j
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

となって，フェルミオンとゲージ場との相互作用を表す項を獲得することになる．

4つのゲージ場のうち，$W_{1\mu}$ と $W_{2\mu}$ は，式 (5.43) にならって，W^+ ボゾンと W^- ボゾンとみなすことができる．したがって $\mathcal{L}$ は，フェルミオンの電荷を変える相互作用

$$
\mathcal{L}_{\rm int}^{\rm CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{\psi_1}\gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} \psi_1 \tag{5.56}
$$

を含んでいる．残りの $W_{3\mu}$ と B_μ については，このままでは，Z ボゾンとフォトンとみなすわけにはいかない．$W_{3\mu}$ と B_μ のどちらもフェルミオンの電荷を変化させることはないので電荷をもたない．中性である．さらに，どのゲージボゾンの質量も 0 なので，$W_{3\mu}$ と B_μ を区別する特徴はない．つまり，この2つの場の混ざった状態のいずれもが実現し得る．そこで，それらの重ね合わせによる場を考えてみよう：

$$
\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_{3\mu} \end{pmatrix} \tag{5.57}
$$

ここで，θ_W をワインバーグ角度という．この A_μ と Z_μ を使って，ラグランジアン (5.55) のうち，$W_{3\mu}$ および B_μ とフェルミオンの相互作用を表す部分（$\mathcal{L}_{\rm int}^{\rm NC}$ と書く）を書き直すと，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm int}^{\rm NC} = &-\overline{\psi_1}\gamma^\mu A_\mu g\frac{\tau_3}{2}\sin\theta_W\psi_1 - \sum_{j=1}^{3}\overline{\psi_j}\gamma^\mu A_\mu g'\frac{Y_j}{2}\cos\theta_W\psi_j \\ &-\overline{\psi_1}\gamma^\mu Z_\mu g\frac{\tau_3}{2}\cos\theta_W\psi_1 + \sum_{j=1}^{3}\overline{\psi_j}\gamma^\mu Z_\mu g'\frac{Y_j}{2}\sin\theta_W\psi_j\end{aligned} \tag{5.58}$$

となる．ここで，フェルミオンのウィークアイソスピンの第3成分を与える演算 T_3 を定義すると，$T_3\psi_1 = \frac{\tau_3}{2}\psi_1$，$T_3\psi_2 = 0$，$T_3\psi_3 = 0$ であるから，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm int}^{\rm NC} = -\sum_{j=1}^{3}\overline{\psi_j}\gamma^\mu\Bigg\{&A_\mu\left(g\sin\theta_W T_3 + g'\cos\theta_W\frac{Y_j}{2}\right) \\ &- Z_\mu\left(g\cos\theta_W T_3 - g'\sin\theta_W\frac{Y_j}{2}\right)\Bigg\}\psi_j\end{aligned} \tag{5.59}$$

と表せる．さらに，

$$\boxed{g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = e} \tag{5.60}$$

が成り立つとすると，$\mathcal{L}_{\rm int}^{\rm NC}$ の A_μ に比例する項は，$-\overline{\psi_j}\gamma^\mu A_\mu(T_3 + \frac{Y_j}{2})e\psi_j$ と表せる．Q をフェルミオンの（素電荷 e を単位とした）電荷を与える演算子と定義すると，$Q\psi_j = Q_j\psi_j$，

$$Q_1 \equiv \begin{pmatrix} Q_{u/\nu_e} & 0 \\ 0 & Q_{d/e^-}\end{pmatrix},\quad Q_2 \equiv Q_{u/\nu_e},\quad Q_3 \equiv Q_{d/e^-} \tag{5.61}$$

である．したがって，

$$\left(T_3 + \frac{Y_j}{2}\right)e\psi_j = Qe\psi_j \tag{5.62}$$

すなわち，

$$\boxed{T_3 + \frac{Y}{2} = Q} \tag{5.63}$$

（Y は，$Y\psi_j = Y_j\psi_j$ で定義される演算子）が成り立てば，$-\overline{\psi_j}\gamma^\mu A_\mu(T_3 + \frac{Y_j}{2})e\psi_j = -\overline{\psi_j}\gamma^\mu A_\mu Qe\psi_j$ は，電荷 Qe のフェルミオンと A_μ との相互作用を表すことになる（式 (5.22) 参照）．つまり，ゲージボゾン A_μ はフォトンである．式 (5.60) は，$SU(2)_L$ ゲージ変換の結合定数および $U(1)_Y$ ゲージ変換の結合定数を電磁相互作用の結合定数に関係づける式であり，これによ

表 5.2 フェルミオンのウィークハイパーチャージ

フェルミオン			ウィークアイソスピン第3成分 T_3	電荷 Q	ハイパーチャージ Y
$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$+1/2$ $-1/2$	0 -1	-1 -1
ν_{eR} e_R	$\nu_{\mu R}$ μ_R	$\nu_{\tau R}$ τ_R	0 0	0 -1	0 -2
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$+1/2$ $-1/2$	$+2/3$ $-1/3$	$+1/3$ $+1/3$
u_R d_R	c_R s_R	t_R b_R	0 0	$+2/3$ $-1/3$	$+4/3$ $-2/3$

って，弱い相互作用と電磁相互作用は，$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ という共通のゲージ変換から導き出され，両者の統一がなされたのである．式 (5.60) から，

$$\boxed{\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \quad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}} \tag{5.64}$$

が導かれることに注意しよう．式 (5.63) は，フェルミオンのもつ内部量子数 Y を定義する式である．Y をウィークハイパーチャージと呼ぶ．表 5.2 に，フェルミオンの T_3, Q, および Y の値をまとめてある．

式 (5.60) と式 (5.63) を用いて，$\mathcal{L}_{\rm int}^{\rm NC}$ を書き直すと

$$\mathcal{L}_{\rm int}^{\rm NC} = \sum_{j=1}^{3} e\overline{\psi_j}\gamma^\mu Q\psi_j A_\mu + \sum_{j=1}^{3} \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\overline{\psi_j}\gamma^\mu(T_3 - Q\sin^2\theta_W)\psi_j Z_\mu \tag{5.65}$$

となる．右辺第 1 項は，フェルミオンとフォトン A_μ との相互作用を表し，第 2 項が，フェルミオンと中性のウィークゲージボゾン Z_μ との相互作用を表している．フェルミオンと Z ボゾンとの結合の大きさは，

$$\boxed{\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}(T_3 - Q\sin^2\theta_W)} \tag{5.66}$$

で与えられる．表 5.3 は，各フェルミオンに対する $(T_3 - Q\sin^2\theta_W)$ を示したものである．

ここまでの議論でわかるように，式 (5.57) で定義されたワインバーグ角度 θ_W は，電磁相互作用と弱い相互作用を統一する鍵となる重要な量であ

表 5.3　フェルミオンと Z ボゾンとの結合定数は，$\frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W}(T_3 - Q\sin^2\theta_W)$ で与えられる．

フェルミオン			T_3	Q	$T_3 - Q\sin^2\theta_W$
ν_{eL}	$\nu_{\mu L}$	$\nu_{\tau L}$	$+1/2$	0	$+1/2$
e_L	μ_L	τ_L	$-1/2$	-1	$-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W$
ν_{eR}	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$	0	0	0
e_R	μ_R	τ_R	0	-1	$\sin^2\theta_W$
u_L	c_L	t_L	$+1/2$	$+2/3$	$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W$
d_L	s_L	b_L	$-1/2$	$-1/3$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\theta_W$
u_R	c_R	t_R	0	$+2/3$	$-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W$
d_R	s_R	b_R	0	$-1/3$	$\frac{1}{3}\sin^2\theta_W$

る．しかしながら，ワインバーグ・サラム理論からは，θ_W の値を導き出すことはできない．θ_W の値は，弱い相互作用によるさまざまな反応の断面積を計算し，それを実験によって得られた測定値と比較することによって得られる．その結果，非常に良い精度で，

$$\boxed{\sin^2\theta_W = 0.23} \tag{5.67}$$

すなわち，

$$\theta_W = 28.7^\circ \tag{5.68}$$

と決定されている．$\sin^2\theta_W = 0.23 \approx 1/4$ を表 5.3 の $T_3 - Q\sin^2\theta_W$ に代入してみると，Z ボゾンは左巻きのニュートリノともっとも強く結合することがわかる．さらに，右巻きのニュートリノ ν_R は，電荷も T_3 も 0 なので，フォトンあるいは Z ボゾンとも結合しない．$W^\pm$ ボゾンも，左巻きのフェルミオンとしか結合しないので，右巻きのニュートリノには結合しない．つまり，右巻きのニュートリノは，存在したとしても何の相互作用もしないのである（ニュートリノはレプトンの一種であるから強い相互作用もしない）．ワインバーグ・サラム理論では，右巻きのニュートリノはそもそも存在しないと仮定されている．

こうして，ワインバーグ・サラムのラグランジアンを使って，フォトン，W^+, W^- ボゾン，そして Z ボゾンを共通のゲージ不変性から導くことができた．が，前項で述べたように，ゲージ不変性は，これらのゲージボゾ

ンが質量 0 の粒子でなくてはならないことを要求する．さらに，$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ゲージ理論では，左巻きと右巻きの粒子が異なる変換を受けることから，すべてのフェルミオンもまた質量 0 の粒子でなければならないことが示せるのである！ W ボゾンと Z ボゾンが，大きな質量をもっていることをどう理解すればいいのだろうか？ t クォークの巨大な質量に代表されるフェルミオンの質量はどう説明できるのか？ いったい，質量の起源は何なのか？ これが，次章のテーマである．

この質量起源の問題に進む前に，ゲージ理論から導き出されるもう 1 つの重要な結果，ゲージボゾンどうしの相互作用について説明しておこう．

5.7 ゲージボゾンどうしの相互作用

ワインバーグ・サラム理論では，式 (5.54) において，$SU(2)_L$ ゲージ群から 3 つ，$U(1)_Y$ 群から 1 つの合計 4 つのゲージボゾンが導入される．したがって，ベクトル場の運動を表すラグランジアン（プロカ・ラグランジアン）は，

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu, \\ \mathbf{W}^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu - \frac{2g}{\hbar c}(\mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu) \end{aligned} \tag{5.69}$$

を定義すると（ここで $\mathbf{W}^\mu = (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu)$ である）

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{16\pi} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi} \mathbf{W}^{\mu\nu} \mathbf{W}_{\mu\nu} \tag{5.70}$$

で表される．このラグランジアンをフォトン A_μ と 3 つのウィークボゾン W_μ^+, W_μ^-, Z_μ を使って書き直すと，$\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ は次の $\mathcal{L}_3$ と $\mathcal{L}_4$ の和で表される．

$$\mathcal{L}_3 = -i\frac{e}{4\pi}\cot\theta_W\{(\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu})W_\mu^+ Z_\nu$$
$$- (\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^\nu W^{+\mu})W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu)\}$$
$$- i\frac{e}{4\pi}\{(\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu})W_\mu^+ A_\nu - (\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^\nu W^{+\mu})W_\mu^- A_\nu$$
$$+ W_\mu^- W_\nu^+(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\}, \tag{5.71}$$

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{e^2}{8\pi\sin\theta_W^2}\{(W_\mu^+ W^{-\mu})^2 - W_\mu^+ W^{+\mu} W_\nu^- W^{-\nu}\}$$
$$- \frac{e^2}{4\pi}\cot\theta_W^2(W_\mu^+ W^{-\mu} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu)$$
$$- \frac{e^2}{4\pi}\cot\theta_W(2W_\mu^+ W^{-\mu} Z_\nu A^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu)$$
$$- \frac{e^2}{4\pi}(W_\mu^+ W^{-\mu} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \tag{5.72}$$

これらはゲージボゾンどうしの相互作用を表している．$\mathcal{L}_3$ は図 5.5 に示されている，ZW^+W^- と γW^+W^- という結合を表す．したがって電子陽電子衝突反応によって

$$\begin{aligned} e^+ + e^- &\to Z \to W^+ + W^- \\ &\to \gamma \to W^+ + W^- \end{aligned} \tag{5.73}$$

の反応によって（重心系のエネルギーが W ボゾンの質量 2 個分以上，約 80 GeV × 2 あれば），W^+ ボゾンと W^- ボゾンの対をつくり出すことができる．

同様にして $\mathcal{L}_4$ は，4 つのゲージボゾンの結合，$W^+W^-W^+W^-$，W^+W^-ZZ，$W^+W^-Z\gamma$，$W^+W^-\gamma\gamma$ を表している（図 5.6 参照）．これら

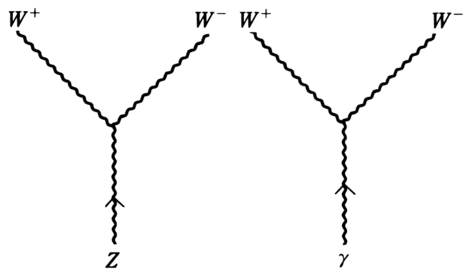


図 5.5　ZW^+W^- 結合と γW^+W^- 結合

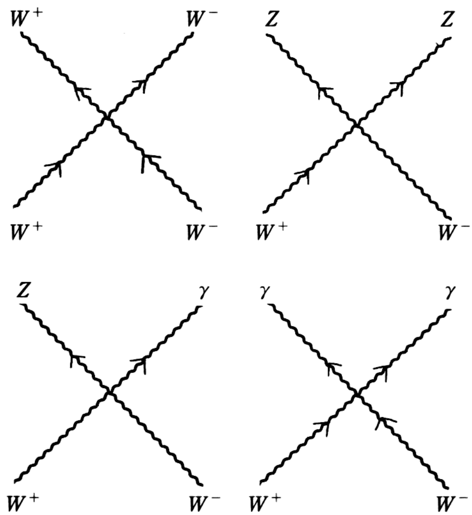


図 5.6　$W^+W^-W^+W^-$, W^+W^-ZZ, $W^+W^-Z\gamma$, $W^+W^-\gamma\gamma$ のゲージボゾンどうしの結合

ゲージボゾンどうしの結合が出てくる理由は，$SU(2)_L$ が可換群でなく，$\mathbf{W}^{\mu\nu}$ に $\mathbf{W}^{\mu} \times \mathbf{W}^{\nu}$ という項があることである．非可換群のゲージ理論は，可換群のゲージ理論より複雑なのである．

第 6 章
質量の起源とヒッグス粒子

ゲージ対称性を第一原理とするゲージ理論によって，弱い相互作用と電磁相互作用におけるゲージボゾンとフェルミオンの結合の強さ，さらに反応の法則を統一的に導くことができた．しかし，ゲージ対称性は，すべての素粒子が質量をもたないことを要求する．実際には，素粒子は，（フォトンをのぞいて）みな質量をもっているので，ゲージ対称性が成り立っていないことになる．このように対称性が成り立っていないことを「対称性が破れている」と表現する．ゲージ対称性と素粒子に質量があるという事実は，両立しないのであろうか．せっかく「うまく」できたと思ったゲージ理論は，自然界の法則を表現していないのであろうか．以下では，ゲージ対称性を第一原理としたまま，対称性を破るメカニズムであるゲージ対称性の自発的な破れについて説明する．

6.1 自発的対称性の破れ

スカラー粒子（スピン 0 の粒子）のラグランジアン，すなわち 5.4 節で説明したクライン・ゴルドン・ラグランジアンを考えよう：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_0\phi\partial^0\phi + \partial_1\phi\partial^1\phi + \partial_2\phi\partial^2\phi + \partial_3\phi\partial^3\phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^2\end{aligned} \tag{6.1}$$

このラグランジアンは，力を受けていない質量 m，スピン 0 の粒子の運動を表している．右辺 $-\phi^2$ に比例する項が質量を表している．また，このラグランジアンは，$\phi \to -\phi$ という変換で形が変わらないことに注意しよう．

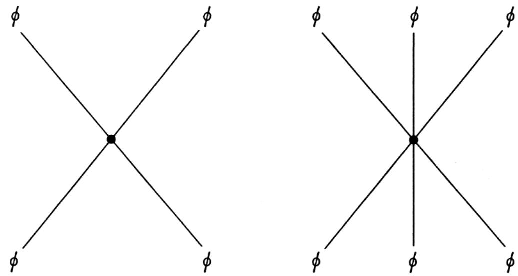


図 6.1　(a) ϕ^4 と (b) ϕ^6 の意味するスカラー粒子自身の相互作用を表すダイアグラム

では，次のラグランジアンはどのような粒子を表していると考えればよいのだろうか．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \alpha^2\phi^2 + \frac{1}{2}\alpha^4\phi^4 - \frac{1}{6}\alpha^6\phi^6 \tag{6.2}$$

ここで α は実定数とする．このラグランジアンの $-\phi^2$ に比例する項は，$\alpha^2 = \frac{1}{2}(mc/\hbar)^2$ と置き換えれば，クライン・ゴルドン・ラグランジアンの質量項と同じである．つまり，このラグランジアンは質量 $m = \sqrt{2}\alpha\hbar/c$ をもつスカラー粒子を記述している．ϕ^4, ϕ^6 に比例する項は，図 6.1(a),(b) で表されるような粒子どうしの相互作用を記述していると考えればよい．

次に，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^4\phi^4 \tag{6.3}$$

というラグランジアンについて考えてみよう．μ と λ は実定数である．この式の右辺第 3 項は，ラグランジアン (6.2) 同様，図 6.1(a) のような粒子の結合を表している．ϕ^2 の項は一見すると質量項のようだが，($-\phi^2$ とは) 符号が逆なので質量項ではない．したがって，このラグランジアンは質量項を含んでいないように見える．では，このラグランジアンで表される粒子には質量がないのであろうか．この問いに答えるためには，もう少し注意深い考察が必要である．粒子のラグランジアンは，運動エネルギーからポテンシャルエネルギーをひいたもの ($\mathcal{L} = T - V$) で与えられるから，$\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$ が粒子の運動エネルギーの項であることを思い出すと，このラグランジアン

は以下のポテンシャル V 中でのスカラー粒子の運動を表していると考えることができる．

$$V = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 \tag{6.4}$$

量子力学の教えるところによれば，ポテンシャル中の粒子の状態は，ラグランジアンが与えるエネルギー最小の状態（量子力学では，この状態を**真空**と呼ぶ）からの**励起状態**として表される．ポテンシャルエネルギーが最小になる ϕ は，式 (6.4) が

$$V = \frac{1}{4}\lambda^2\left(\phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda^2}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda^2} \tag{6.5}$$

と変形できることから，

$$\phi = \pm\frac{\mu}{\lambda} \tag{6.6}$$

であることがわかる．すなわち，この ϕ がラグランジアンの与える真空を表している．ポテンシャル中の粒子の状態は，この真空からの励起状態として記述されなければならない．したがって，このどちらかの ϕ のまわりでラグランジアンを展開することによって粒子の状態を得ることができる．そこでいま，$\phi = +\mu/\lambda$ を真空として選び，真空からのズレを表す新しいスカラー場 $\eta \equiv \phi - \mu/\lambda$ を導入してラグランジアンを書き直すことにする．この η がポテンシャル中を運動するスカラー粒子に対応するスカラー場である．式 (6.3) は，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\eta)(\partial^\nu\eta) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\mu\frac{\hbar}{c}\right)^2\frac{c^2}{\hbar^2}\eta^2 - \mu\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4 + \frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda^2} \tag{6.7}$$

のように変形できる．すると，この実際の粒子状態に対応する場 η で書き直したラグランジアンの中に $-\eta^2$ に比例する項が現れることがわかる．これは，スカラー粒子 η が，

$$m_\eta = \sqrt{2}\mu\hbar/c \tag{6.8}$$

という質量をもっていることを意味する（η^3, η^4 の項は，粒子間の相互作用を表している）．ここで注意すべきは，ラグランジアン (6.7) はラグラン

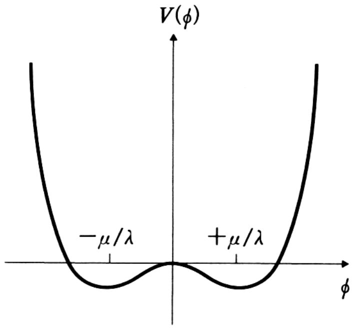


図 6.2　ポテンシャル $V = \frac{1}{4}\lambda^2\left(\phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda^2}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda^2}$ の形

ジアン (6.3) とまったく等価だという事実である．ラグランジアン (6.7) も (6.3) も同じ物理を記述している．ただし，ラグランジアン (6.3) は，図 6.2 のようなポテンシャルをその最小値（真空）でなく，原点のまわりで展開した形で表現したため質量項があらわに見えていなかったのである．もう 1 つの重要な点は，ラグランジアン (6.3) は，$\phi \to -\phi$ の変換で形を変えないのに対し，(6.7) は，$\eta \to -\eta$ で形を変える．ラグランジアン (6.3) は，スカラー場の符号を変えるという変換について対称であるのに，(6.7) ではその対称性が破れているのである．この対称性の破れの原因は，ラグランジアンを真空のまわりで展開したことにある．ラグランジアンのもつ対称性を，真空がもっていないからである．もちろん，$\phi \to -\phi$ の変換で，$\phi = +\mu/\lambda$ は $\phi = -\mu/\lambda$ に移り，どちらも実現可能な真空であるから，真空全体としては対称性が保たれている．しかし，この実現可能な 2 つの真空のうちの一方を選んだ瞬間に対称性が破れるのである．もとのラグランジアンにあった対称性は，真空を選ぶことによって見えなくなる（隠れてしまう）のである．このような対称性の破れを，対称性の自発的な破れと呼んでいる．この「自発的な破れ」を理解するには，自発的でない破れを考えるとよいかもしれない．たとえば，空間の等方性という対称性は，空間に電場や磁場をかけるなどして「外的な場」を導入することによって破ることができる．電場や磁場がかかっていなければ，荷電粒子にとって空間のどの方向も「対等」，つまり等方的であるが，電場や磁場のかかっている空間では，荷電粒子の運動は電場ベクトルや磁場ベクトルの向いている方向に依存するので，荷電粒

子にとってその空間は等方的でなくなる．このとき，荷電粒子の運動を記述するラグランジアンは，座標回転に対して対称でなくなる．これが，自発的でない破れの典型的な例である．これに対し，自発的対称性の破れは，外場の導入なしに，まったく対等な真空の中からある1つの真空を選ぶという行為によってラグランジアンのもつ対称性が「見かけ上」破れるのである．

ラグランジアン (6.3) は，$(\phi \to -\phi)$ という不連続な変換に対して対称であり，2個の真空のうちの1個を選ぶことによって，この対称性が自発的に破れた．同様にして連続な変換，たとえば回転について対称なラグランジアンについても，自発的対称性の破れが起こり得る．例として以下のようなラグランジアンを考えよう．まず，2つの実関数の場 ϕ_1 と ϕ_2 を組み合わせて，1つの複素関数の場（複素場）ϕ を定義する：

$$\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2 \tag{6.9}$$

よって，

$$\phi^*\phi = \phi_1^2 + \phi_2^2 \tag{6.10}$$

このとき，ラグランジアン

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\phi)^*(\partial^\nu\phi) + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^*\phi)^2} \tag{6.11}$$

は，θ を実定数として，

$$\begin{aligned}\phi_1 &\to \phi_1\cos\theta - \phi_2\sin\theta, \\ \phi_2 &\to \phi_1\sin\theta + \phi_2\cos\theta\end{aligned} \tag{6.12}$$

の回転，すなわち連続変換

$$\phi \to \exp(i\theta)\phi \tag{6.13}$$

で対称なラグランジアンである．この変換は $U(1)$ 変換に他ならない．このラグランジアンのポテンシャルエネルギー

$$V = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^*\phi) + \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^*\phi)^2 \\ = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \tag{6.14}$$

の最小は，原点 $\phi_1 = \phi_2 = 0$ では起こらず，

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2} \tag{6.15}$$

の円周上の任意の点で起こる．この円周上の任意の点が真空になり得るのである．そこでいま，真空として，

$$(\phi_1, \phi_2) = \left(\frac{\mu}{\lambda}, 0\right) \tag{6.16}$$

を選んで，ラグランジアンをこの点のまわりで展開しよう．

$$\eta \equiv \phi_1 - \frac{\mu}{\lambda}, \quad \xi \equiv \phi_2 \tag{6.17}$$

を定義すると，

$$\mathcal{L} = \left\{\frac{1}{2}(\partial_\nu\eta)(\partial^\nu\eta) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\mu\frac{\hbar}{c}\right)^2 \frac{c^2}{\hbar^2}\eta^2\right\} + \left\{\frac{1}{2}(\partial_\nu\xi)(\partial^\nu\xi)\right\} \\ - \left\{\mu\lambda(\eta^3 + \eta\xi^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2)\right\} + \frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda^2} \tag{6.18}$$

となる．第1項は，質量 $m_\eta = \sqrt{2}\mu\hbar/c$ をもつスカラー場 η に対するクライン・ゴルドン・ラグランジアンであり，第2項は質量0のスカラー場 ξ に対するクライン・ゴルドン・ラグランジアンである．第3項は，η, ξ に対応するそれぞれの粒子自身の相互作用 (η^3, η^4，および ξ^4)，および η 粒子と ξ 粒子間の相互作用 ($\eta\xi^2$ と $\eta^2\xi^2$) を表している．この η と ξ の場で書き直したラグランジアンは，もはや ϕ_1 と ϕ_2 で書かれたラグランジアンのもつ回転対称性を有していない．式 (6.15) を満たす真空の集合 (ϕ_1, ϕ_2) から，ある1点を真空として選んだことにより対称性が「自発的に」破れたのである．

ここで，注目すべきは，対称性が自発的に破れた結果，η 場は質量をもつが，ξ 場は質量をもたないことである．この質量をもたないスカラー粒子の出現は，この例だけにとどまらず，より一般的に証明され，ゴールドス

トーン (Goldstone) の定理として知られている．すなわち，一般に連続なグローバル対称性を自発的に破ると，スピン 0（すなわちスカラー）の質量をもたない粒子（これをゴールドストーンボゾンと呼ぶ）が，必ず（1 個以上）出現する．現実には，質量 0 のスカラー粒子は存在しないので，「対称性の自発的な破れ」が自然界の粒子に質量を与えるメカニズムになり得るためには，不要なゴールドストーンボゾンを出現させないメカニズムも同時に存在しなくてはならない．

以上の例が示唆するのは，電弱相互作用のラグランジアンのもつゲージ対称性を，もし「自発的に破る」ことができれば，ゲージ対称性を失うことなく，ゲージボゾンやフェルミオンに質量を与えることができるのではないかという可能性である．ゲージ対称性，すなわち，ローカルな位相変換の自発的な破れによって何が起こるかを見るために，電磁相互作用のゲージ対称性 $U(1)$ を自発的に破ってみることにする．もちろん現実には，前章で示したように，電磁相互作用の対称性，$U(1)$ ゲージ対称性は破れておらず，そのゲージボゾンであるフォトンに質量はない．何が起こるかを示すために，あえて破ってみることにする．さらに，このとき，ゴールドストーンボゾンをどのようにしたら出現させずにすむかも明らかになる．

6.2 ローカルゲージ対称性の自発的な破れ

ラグランジアン (6.11) と ϕ のローカルゲージ変換

$$\phi \to \exp(i\theta(x^\nu))\phi \tag{6.19}$$

を考える．ここで $\theta(x^\nu)$ は，実定数でなく，x^ν に依存する実関数である．前節においては，この $U(1)$ 回転は，時空の点に依存しないグローバルな回転であったのに対し，ローカルゲージ変換では，$U(1)$ 回転を時空の各点で独立に行う．このローカルな変換に対してラグランジアンが不変になるように要求するのがゲージ理論である．したがって，ラグランジアン (6.11) をゲージ不変にするためには，5.5 節の処方箋に従って，ゲージ場 A_μ を導入し，微分 ∂_μ を共変微分

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu \tag{6.20}$$

で置き換える必要がある．ここで，q はスカラー場 ϕ の表すスカラー粒子の電荷である．すると，ゲージ不変なラグランジアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c}A_\mu\right)\phi^*\right\}\left\{\left(\partial^\mu + i\frac{q}{\hbar c}A^\mu\right)\phi\right\} \\ &+ \frac{1}{2}\mu^2(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{6.21}$$

となる．ゲージ場 A_μ は，$\phi \to \phi' = \exp(i\theta(x^\nu))\phi$ の変換と同時に，

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{\hbar c}{q}\partial_\mu\theta(x^\nu) \tag{6.22}$$

のように変換される．以下で，このラグランジアンのもつ $U(1)$ 対称性の自発的な破れを考察しよう．ポテンシャルの最小値は，前節同様，$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \mu^2/\lambda^2$ の円周上の任意の点で起こるから，真空として $(\phi_1, \phi_2) = (\mu/\lambda, 0)$ を選ぶことにする．これによって，$U(1)$ 対称性が自発的に破れる．ここまでは，グローバルな $U(1)$ 対称性の破れと同じであるが，ラグランジアン (6.21) がローカルゲージ変換で対称であることから，次のような重大な違いが出てくる．それは，任意の時空点 x^ν におけるスカラー場 $\phi(x^\nu)$ について，位相 $\theta(x^\nu)$ を

$$\theta(x^\nu) = -\tan^{-1}\left(\frac{\phi_2(x^\nu)}{\phi_1(x^\nu)}\right) \tag{6.23}$$

と選ぶことにより，$\phi'(x^\nu) = \exp(i\theta(x^\nu))\phi(x^\nu)$ を必ず実数に変換することができるということである．ラグランジアンは，ローカルな $U(1)$ 対称性をもつので，この変換で物理は変わらない．よって，$\phi(x^\nu)$ とし実部だけを考えればよいことになる：

$$\phi(x^\nu) = \phi_1(x^\nu) \tag{6.24}$$

このような操作を，ある適当な「ゲージを選ぶ」という．グローバルなゲージ変換では，こうはいかないことに注意しよう．なぜなら，時空のある点で $\phi(x^\nu)$ を実数にできたとしても，その位相変換は時間や場所によらない「定数」であるから，他の点の $\phi(x^\nu)$ を実数にできるとは限らないからである．

このゲージを選んだ後，ラグランジアンを，

$$\phi = \phi_1 \equiv \eta + \frac{\mu}{\lambda} \tag{6.25}$$

として真空のまわりで展開すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\left\{\frac{1}{2}(\partial_\nu \eta)(\partial^\nu \eta) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\mu\frac{\hbar}{c}\right)^2 \frac{c^2}{\hbar^2}\eta^2\right\} \\ &+ \left\{-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right\} \\ &+ \left\{\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 \eta(A_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 \eta^2(A_\mu A^\mu) - \lambda\mu\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4\right\} \\ &+ \frac{\mu^4}{4\lambda^2}\end{aligned} \tag{6.26}$$

を得る．このラグランジアンの右辺第 1 項は質量 $m_\eta = \sqrt{2}\mu\hbar/c$ のスカラー粒子を表す．第 2 項は，プロカ・ラグランジアンであるから，質量

$$m_A = 2\sqrt{\pi}\left(\frac{q}{c^2}\frac{\mu}{\lambda}\right) \tag{6.27}$$

のベクトル（スピン 1 の）粒子を表している．すなわち，ローカルな $U(1)$ ゲージ対称性が自発的に破れた結果，質量をもっていなかったゲージボゾンが質量 m_A を得たのである．第 3 項は，スカラー粒子とゲージボゾンの相互作用およびスカラー粒子自身の相互作用を表している．注意すべきは，グローバルな $U(1)$ 対称性の自発的な破れの結果，出現したゴールドストーンボゾンが消えていることである．ローカルなゲージ対称性の自発的な破れに限り，ゲージ変換によって，質量 0 のスカラー粒子を消してしまうことができるのである．すなわち，ゴールドストーンの定理はローカルなゲージ対称性をもつ理論では避けることができるのである．

ラグランジアン (6.21) とラグランジアン (6.26) は，まったく同一の物理を表している．ラグランジアン (6.26) は，適当なゲージを選び，真空のまわりでラグランジアン (6.21) を展開したものにすぎない．ラグランジアン (6.21) ではあらわに見えていた $U(1)$ ゲージ対称性は，ラグランジアン (6.26) ではある 1 点を真空として選んだために，隠れてしまっただけであ

る．したがって，ゲージ理論の利点が失われることはない．

この質量を得たゲージボゾンと消えてしまったゴールドストーンボゾンについて興味深い考察をすることができる．自発的対称性の破れが起こる前は，質量0のゲージボゾンと複素スカラー場 ϕ が存在していたので，ラグランジアンの含む**自由度**（あるいは，方程式に含まれる独立な変数の数）は，$2+2=4$ 個であった(1)．ところが，自発的対称性の破れの後は，ゲージボゾンは質量を得て，その自由度が3となる．一方で，ϕ は実数のスカラー場となり，その自由度は1である．つまり，ゴールドストーンボゾンのもつ自由度1が，質量のあるゲージボゾンの3番目の自由度に変わったとみなすことができる．このようにして，スカラー場を導入して，ローカルなゲージ対称性を自発的に破り，その結果，ゲージボゾンに質量を与える方法を**ヒッグス機構**と呼び，質量 m_η のスカラー粒子を**ヒッグス粒子**という．この例では，簡単のために $U(1)$ ゲージ理論を選んだが，現実にはフォトンには質量がなく，$U(1)$ 対称性は破れていない．破れているのは，電弱相互作用の対称性，$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ である．それによって，弱い相互作用のゲージボゾン (W^+, W^-, Z) が質量を得る．以下で，そのメカニズムをくわしく見ていこう．

6.3　ヒッグス機構

ローカルな $U(1)$ ゲージ変換と同時に，ローカルな $SU(2)$ ゲージ変換でも不変なラグランジアン（密度）をつくってみる．まず，前節同様，複素数のスカラー場 $\Phi_\mathrm{A} = \phi_1 + i\phi_2$，$\Phi_\mathrm{B} = \phi_3 + i\phi_4$ からなる，2成分の複素場

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \Phi_\mathrm{A} \\ \Phi_\mathrm{B} \end{pmatrix} \tag{6.28}$$

を考えよう．したがって，Φ は，4つの実関数の場の組み合わせである．ラ

(1) 質量0のスピン1の粒子の自由度は2である．これは，ちょうど光，フォトンの自由度が横偏向の2成分のみであるのに対応している．質量をもつスピン1の粒子は，縦偏向の成分があるのでその自由度は3である．

グランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi^\dagger)(\partial^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \tag{6.29}$$

は(2)，5.6 節で与えられたグローバルな $SU(2) \otimes U(1)$ 変換 $\Phi \rightarrow \Phi' = \exp(i\theta)\exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau})\Phi$ で不変である．$V(\Phi^\dagger\Phi) = m^2\Phi^\dagger\Phi$ であれば，このラグランジアンは，同一の質量 m をもつ 4 個のスカラー粒子のクライン・ゴルドン・ラグランジアンに他ならない．このラグランジアンを，ローカルな $SU(2)\otimes U(1)$ ゲージ変換で不変にするためには，5.6 節に従って，$\mathbf{W}_\mu = (W_{1\mu}, W_{2\mu}, W_{3\mu})$, B_μ の 4 つのゲージ場を導入し，微分 ∂_μ を共変微分

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{g}{\hbar c}\mathbf{W}_\mu \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} + i\frac{g'}{\hbar c}\frac{Y}{2}B_\mu \tag{6.30}$$

で置き換える必要がある．すると，ラグランジアン

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi) \tag{6.31}$$

は，ゲージ不変となる．このラグランジアンのもつ $SU(2) \otimes U(1)$ 対称性を自発的に破る．ポテンシャル $V(\Phi^\dagger\Phi)$ として，

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = -\frac{1}{2}\mu^2(\Phi^\dagger \Phi) + \frac{1}{4}\lambda^2(\Phi^\dagger \Phi)^2 \tag{6.32}$$

を考えると前節同様，このポテンシャルは，

$$\Phi^\dagger \Phi = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2} \tag{6.33}$$

の成り立つすべての Φ で最小となる．このラグランジアンは，ローカルな $SU(2)$ 変換で不変なので，$\Phi(x^\nu)$ にゲージ変換 $\exp(i\boldsymbol{\lambda}(x^\nu)\cdot\boldsymbol{\tau})$ を行うことによって(3)，$\Phi_A = 0$ および $\Phi_B = \phi_3$ とすることができる．そこで，真空として

(2) $\Phi^\dagger\Phi = \Phi_A^*\Phi_A + \Phi_B^*\Phi_B = \phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2+\phi_4^2$, $\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi = \partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \partial_\mu\phi_3\partial^\mu\phi_3 + \partial_\mu\phi_4\partial^\mu\phi_4$.

(3) 3 つの位相 $\lambda_1(x^\nu), \lambda_2(x^\nu), \lambda_3(x^\nu)$ を適当に選ぶ．

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{6.34}$$

を選び，この真空のまわりでラグランジアンを展開する．ここで，$v = \mu/\lambda$ とした．また，この真空が電気的中性 $(Q = 0)$ であることを要請すると，

$$Q \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \left(T_3 + \frac{Y}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

において，$T_3 = -1/2$ だから，$Y = 1$ でなければならない．実関数の場 $h(x^\nu)$ を導入して

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x^\nu) \end{pmatrix} \tag{6.36}$$

とおく．すると，

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = V(h) = \frac{\lambda^2}{4}(h^4 + 4vh^3 + 4v^2h^2 - v^4), \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \Phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu h \end{pmatrix} + i \frac{g}{\hbar c} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_{3\mu} & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_{3\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} \\ &\quad + i \frac{g'}{\hbar c} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B_\mu (v + h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{i}{\hbar c} \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ (v + h) \\ \partial_\mu h + \frac{i}{\hbar c} \frac{1}{2} (-g W_{3\mu} + g' B_\mu)(v + h) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi &= \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\hbar c} \right)^2 W_\mu^- W^{+\mu} (v + h)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\hbar c} \right)^2 (-g W_{3\mu} + g' B_\mu)(-g W_3^\mu + g' B^\mu)(v + h)^2 \end{aligned} \tag{6.39}$$

さらに，ここで，前章の式 (5.60) と式 (5.57) を使うと，

$$-gW_{3\mu} + g'B_\mu = \sqrt{g^2+g'^2}\left(-\frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}W_{3\mu} + \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}B_\mu\right)$$
$$= -\frac{g}{\cos\theta_W}Z_\mu \tag{6.40}$$

であるから，

$$(\mathcal{D}_\mu\Phi)^\dagger\mathcal{D}^\mu\Phi = \partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\hbar c}\right)^2 W_\mu^- W^{+\mu}(v+h)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{g}{\hbar c}\right)^2\frac{1}{\cos^2\theta_W}Z_\mu Z^\mu(v+h)^2 \tag{6.41}$$

を得る．よって，

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \left\{\frac{1}{4}\left(\frac{g}{\hbar c}\right)^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{8}\left(\frac{g}{\hbar c}\right)^2\frac{1}{\cos^2\theta_W}Z_\mu Z^\mu\right\}(v+h)^2$$
$$-\frac{\lambda^2}{4}(h^4+4vh^3+4v^2h^2-v^4) \tag{6.42}$$

このラグランジアンのうち，

$$\frac{1}{4}\left(\frac{g}{\hbar c}\right)^2 v^2 W_\mu^- W^{+\mu} = \frac{1}{8}\left(\frac{g}{\hbar c}\right)^2 v^2\{W_\mu^-(W^{-\mu})^* + W_\mu^+(W^{+\mu})^*\} \tag{6.43}$$

と

$$\frac{1}{8}\left(\frac{g}{\hbar c}\right)^2\frac{v^2}{\cos^2\theta_W}Z_\mu Z^\mu \tag{6.44}$$

は，それぞれ $W^\pm$ ボゾンと Z ボゾンの質量項 $\frac{1}{8\pi}(\frac{m_{W^\pm}c}{\hbar})^2 W_\mu^\pm(W^{\pm\mu})^*$ と $\frac{1}{8\pi}(\frac{m_Z c}{\hbar})^2 Z_\mu Z^\mu$ とみなすことができるから，$SU(2)$ 対称性の自発的破れによって，W ボゾンと Z ボゾンがそれぞれ，質量

$$\boxed{m_{W^+} = m_{W^-} = \frac{\sqrt{\pi}}{c^2}gv} \tag{6.45}$$

$$\boxed{m_Z = \frac{\sqrt{\pi}}{c^2}\frac{1}{\cos\theta_W}gv} \tag{6.46}$$

をもつことになる．v は，0 でないので，ゲージボゾン $W^\pm$ と Z が有限な質量をもっている．このように，ローカルな $SU(2)$ ゲージ対称性を，複素スカラー場 Φ によって自発的に破る仕組みをヒッグス機構と呼ぶ．m_Z と $m_{W^\pm}$ の間には，

$$m_Z = \frac{m_{W^\pm}}{\cos\theta_W} \geq m_{W^\pm} \tag{6.47}$$

という関係があることが予言されることに注意しよう．現在，W ボゾンと Z ボゾンは，実験によって正確に測定されており，その値は，

$$\begin{aligned} m_{W^\pm} &= 80.419 \pm 0.056\ \mathrm{GeV}/c^2, \\ m_Z &= 91.1882 \pm 0.0022\ \mathrm{GeV}/c^2 \end{aligned} \tag{6.48}$$

である．一方，$\mathcal{L}_\Phi$ には，$A_\mu = W_{3\mu}\sin\theta_W + B_\mu\cos\theta_W$ は現れないので，フォトン A_μ は質量をもたない（もちろん，これが，われわれの望んでいることである）．

こうしてゲージボゾンに質量をもたせることができたわけだが，ラグランジアン $\mathcal{L}_\Phi$ の残りの項は，何を意味しているのだろうか？　残りの項のうち，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mathrm{H} &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{\lambda^2}{4}(h^4 + 4vh^3 + 4v^2h^2 - v^4) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{1}{2}\left\{\frac{c}{\hbar}\left(\sqrt{2}\frac{\hbar}{c}\lambda v\right)\right\}^2 h^2 - v\lambda^2 h^3 - \frac{\lambda^2}{4}h^4 + \frac{\lambda^2 v^4}{4} \end{aligned} \tag{6.49}$$

は，ラグランジアン (6.7) 同様，質量 $m_\mathrm{H} = \sqrt{2}\frac{\hbar}{c}\lambda v$ のスカラー粒子を表す．ヒッグス機構の結果，出現するこの新粒子をヒッグス粒子と呼ぶ．h^3 と h^4 の項は，ヒッグス粒子どうしの相互作用を表している．この理論が正しいならば，ヒッグス粒子が存在しなければならない．ヒッグス粒子の発見は，質量の起源がヒッグス機構にあることの重要な証拠となるのだが，現在までのところまだ見つかっていない．そして残りの，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mathrm{HGG} &= \left[\frac{1}{4}\left(\frac{g}{\hbar c}\right)^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{8}\left(\frac{g}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{\cos^2\theta_W} Z_\mu Z^\mu\right](2vh + h^2) \\ &= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_W c}{\hbar}\right)^2 [W_\mu^-(W^{-\mu})^* + W_\mu^+(W^{+\mu})^*]\left(2\frac{h}{v} + \frac{h^2}{v^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_Z c}{\hbar}\right)^2 Z_\mu Z^\mu \left(2\frac{h}{v} + \frac{h^2}{v^2}\right) \end{aligned} \tag{6.50}$$

は，ゲージボゾンとヒッグス粒子との相互作用を表している．結合の強さは，ゲージボゾンの質量の2乗に比例しているのがわかる．こうして，ラ

グランジアン $\mathcal{L}_\Phi$ は，自発的対称性の破れの結果，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\Phi =\ & (\text{ゲージボゾンの質量項}) \\
& + \mathcal{L}_{\mathrm{H}}(\text{ヒッグス粒子の運動と質量}+\text{ヒッグス粒子どうしの相互作用}) \\
& + \mathcal{L}_{\mathrm{HGG}}(\text{ヒッグス粒子とゲージボゾンの相互作用})
\end{aligned}
\tag{6.51}
$$

となったのである．

6.4　標準理論の 18 個のパラメータ

ゲージ対称性で禁止されていたのは，ゲージボゾンの質量項だけではない．一般に，フェルミオンの質量項は，以下に示す変形によって

$$
\boxed{\mathcal{L}_m = -mc^2\overline{\psi}\psi = -mc^2(\overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L)}
\tag{6.52}
$$

と書くことができる．

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi_L} &= \psi_L^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0\frac{1}{2}(1+\gamma^5) = \overline{\psi}\frac{1}{2}(1+\gamma^5), \\
\overline{\psi_L}\psi_R &= \overline{\psi}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi \\
&= \overline{\psi}\frac{1}{4}(1+2\gamma^5+(\gamma^5)^2)\psi \\
&= \overline{\psi}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi, \\
\overline{\psi_R}\psi_L &= \overline{\psi}\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi
\end{aligned}
\tag{6.53}
$$

ここで，$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu, (\gamma^5)^2 = 1$ を用いた．

ψ_L は，たとえば $\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ という $SU(2)$ 変換の二重項であるのに対し，ψ_R は，u_R と d_R という，それぞれ $SU(2)$ の一重項である．このため，$\mathcal{L}_m$ は，$SU(2)_L$ 変換で不変になり得ず禁止されてしまう．つまり，ゲージ不変性の要請から，フェルミオンも質量をもてないことになる．この困難も，ヒッグス機構で解消される．ただし，この場合には，前節のスカラー場 Φ を使って，次のような $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ゲージ不変な「湯川型のフェルミオン - スカラー場結合」と呼ばれるラグランジアンを考える．

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -c_d \left\{ (\overline{u_L}\ \overline{d_L}) \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{pmatrix} d_R + \overline{d_R}(\Phi_A^*\ \Phi_B^*) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right\}$$
$$- c_u \left\{ (\overline{u_L}\ \overline{d_L}) \begin{pmatrix} \Phi_B^* \\ -\Phi_A^* \end{pmatrix} u_R + \overline{u_R}(\Phi_B - \Phi_A) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right\} \tag{6.54}$$

ここで，c_d と c_u は，スカラー場とフェルミオンの結合定数である．このラグランジアンは，自発的対称性の破れ ($\Phi_A \to 0, \Phi_B \to v + h(x^\nu)$) ののち，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= -c_d v(\overline{d_L} d_R + \overline{d_R} d_L) - c_u v(\overline{u_L} u_R + \overline{u_R} u_L) \\ &\quad - c_d h(\overline{d_L} d_R + \overline{d_R} d_L) - c_u h(\overline{u_L} u_R + \overline{u_R} u_L) \\ &= -(c_d v\overline{d}d + c_u v\overline{u}u + c_d h\overline{d}d + c_u h\overline{u}u) \end{aligned} \tag{6.55}$$

となる（ここで $\overline{u_L} u_R + \overline{u_R} u_L = \overline{u}u$ を用いた．$\overline{d}d$ についても同様）．$v \neq 0$ であるから，

$$\begin{aligned} c_d v\overline{d}d &= m_d c^2 \overline{d}d, \\ c_u v\overline{u}u &= m_u c^2 \overline{u}u, \end{aligned} \tag{6.56}$$

とみなすことができる．よって，$c_d = \frac{m_d c^2}{v}$, $c_u = \frac{m_u c^2}{v}$ である．こうして，ゲージボゾンの質量同様，スカラー場 Φ が $SU(2)_L$ ゲージ対称性を自発的に破ることによって，フェルミオンが質量をもつことができる．ここで注意すべきなのは，ヒッグス機構は，フェルミオンが有限な質量をもつことを説明はするが，それぞれのフェルミオンの質量の大きさがどうあるべきかについては，何の予言もしてくれないことである．m_d は，v に比例するが，その比例係数 c_u には何の制限もついていない．その数値は，m_u を実験で測定し，かつ v を知ることによって，はじめて求まるのである．理論はフェルミオンの質量値を必然的に導くことはできない．これは，第1章で説明したように，フェルミオンの質量が，理論におけるパラメータ(4)であることを意味している．また，

(4) 質量をパラメータとするかわりに，比例係数 c_d, c_u をパラメータとしても等価である．

$$c_d h\bar{d}d + c_u h\bar{u}u = \frac{m_d c^2}{v} h\bar{d}d + \frac{m_u c^2}{v} h\bar{u}u \tag{6.57}$$

は，ヒッグス粒子とフェルミオンとの相互作用を表しているから，その結合の強さは，フェルミオンの質量に比例することがわかる．ゲージボゾンとヒッグス粒子との結合の強さは，前節で説明したようにゲージボゾンの質量の 2 乗に比例する．フォトンが電荷をもつすべての粒子と相互作用するように，ヒッグス粒子は，質量をもつすべての粒子と相互作用し，その結合は，重い粒子ほど強い．

こうして，ヒッグス機構によって，$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ゲージ対称性に基づく，電弱統一理論の枠組みの中で，ゲージボゾン W^+, W^-, Z とフェルミオンに質量をもたせることができた．電弱統一理論 + ヒッグス機構，それに強い相互作用のゲージ理論(5)をまとめて，標準理論と呼んでいる．標準理論は，さまざまな実験的検証を経て，非常に高い精度でその正しさが確かめられている．しかし，フェルミオンの質量パラメータのように，理論そのものからは予想することができないたくさんのパラメータを含んでいる理論でもある．ここで，標準理論が含んでいるパラメータを整理しておこう．まず，レプトンとクォーク，すなわちフェルミオンの質量である．レプトンとクォークは，各世代に 2 つずつあり，世代の数は 3 つあるので，質量パラメータの総数は，$(2+2) \times 3 = 12$ であるが，標準理論においては，ニュートリノの質量は 0 と仮定されている(6)ので，$12 - 3 = 9$ 個のパラメータがある．次に，結合定数である．電弱相互作用の $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ゲージ対称性にともなう g と g'，それに，強い相互作用の $SU(3)$ ゲージ対称性にともなう g_s の 3 個がある．これらも，理論から導き出すことはできず，測定によって決定する必要がある．

そして，ヒッグス機構で現れる真空の値 v とヒッグス粒子の質量もパラメータである．ヒッグス粒子の質量は，$m_{\rm H} = \sqrt{2}\frac{\hbar}{c}\lambda v$ であるから，λ をパ

(5) 付録 C 参照．

(6) これは，右巻きのニュートリノが存在しないという実験事実に基づく仮定であったが，最近のニュートリノ実験によると，ニュートリノもほんのわずか質量をもつ可能性が高い．したがって，標準理論の修正が必要なことになる．

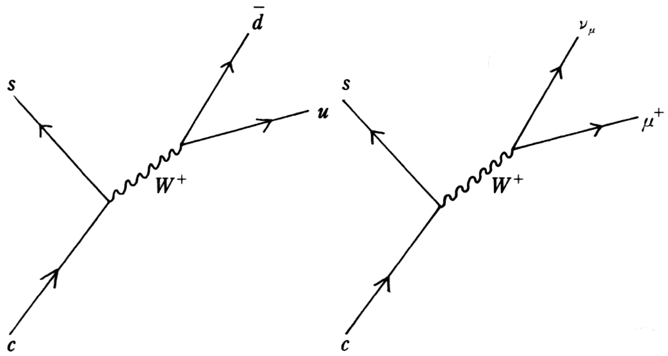


図 6.3　$c \to s + u + \bar{d}$ 反応と $c \to s + \mu^+ + \nu_\mu$ 反応のファインマンダイアグラム

ラメータとしてもよいが，実験で直接測定するのは質量であるから，ここでは m_{H} をパラメータとみなすことにしよう．v については，W ボゾンと Z ボゾンの質量の測定などから，$v = 246$ GeV であることがわかっているが，ヒッグス粒子の質量は，ヒッグス粒子が発見されるまで，待たねばならない．以上で 14 個のパラメータであるが，標準理論は，さらにあと 4 個のパラメータを含んでいる．

残りの 4 個のパラメータも弱い相互作用に関係している．すでに何度も述べてきたように，標準理論においてフェルミオンは **3 世代の階層構造**をなしている．クォークについては，

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \tag{6.58}$$

となっている．弱い相互作用は，すべてのフェルミオンに同様に働くので，電荷 2/3 のクォークは，W^+ を放出して，クォークと反クォーク，あるいは，レプトンと反レプトンの対になる．図 6.3 で示される $c \to s + u + \overline{d}$ や $c \to s + \mu^+ + \nu_\mu$ のような反応が起こる．この他にも，$c \to d + u + \overline{d}$ や $c \to d + \mu^+ + \nu_\mu$ も起こる（図 6.4 参照）．

c が s に崩壊する反応は，同じ世代内の反応であるが，c が d になるのは世代をまたがる反応で，前者のほうが後者より 20 倍ほど頻繁に起こることが，実験的に知られている（c は，b より軽いので，$c \to b$ はエネルギー保

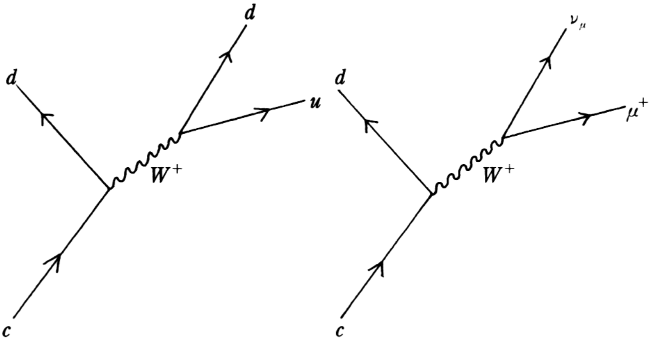


図 6.4　$c \to d + u + \bar{d}$ 反応と $c \to d + \mu^+ + \nu_\mu$ 反応のファインマンダイアグラム

存則で禁止されている)．標準理論において，世代間の混じり具合は，3 行 3 列のユニタリ行列(7) V で表現される：

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \tag{6.59}$$

たとえば，c クォークが s クォークに崩壊する頻度は $|V_{cs}|^2$ に比例し，c クォークが d クォークに崩壊する頻度は，$|V_{cd}|^2$ に比例する．この行列は，小林・益川行列と呼ばれる．一般に 3 行 3 列のユニタリ行列は，9 個のパラメータを含んでいるが，このうち，物理的に意味があり，実験で測定できるのは，4 個のパラメータである．

小林・益川行列に含まれる 4 個のパラメータが最後のパラメータであり，合計すると標準理論には，18 個のパラメータが含まれていることになる．これらの数値は，理論から予測することはできず，実験で測定し決定するしかない．標準理論は，いわば，18 個のパラメータに依存する関数のようなものと考えることができる．これらのパラメータの数値を指定すれば，素粒子反応のほとんどすべてについて，予測を行うことができるが，これらのパラメータがどういう数値をとるべきかについては，ゲージ原理もヒッグス機構も何も答えてくれない．したがって，標準理論の先により基礎的な原理あ

(7) 5.6 節参照.

るいは法則があり，それによって，18 個のパラメータが決定されていることが期待されるのである．この「より基礎的な法則」の発見が，現代素粒子物理学の最大の課題である．

付　録

A　極座標と立体角

球対称な系を記述するときには，デカルト座標 (x, y, z) を使うよりも，(r, θ, ϕ) で与えられる極座標を使うほうが便利なことが多い．(x, y, z) と (r, θ, ϕ) の関係は，図 A.1 から，

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{A.1}$$

であるから，極座標 (r, θ, ϕ) は，(x, y, z) を使って，

$$\begin{aligned} r &\equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos\theta &\equiv \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos\phi &\equiv \frac{x}{r\sin\theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \tag{A.2}$$

と定義できる．θ のとり得る値は 0 から π まで，ϕ は 0 から 2π までである．また，r を動径，θ を天頂角，ϕ を方位角と呼ぶ．

デカルト座標系での無限小変位は，(dx, dy, dz) であるが，極座標系での無限小変位 $(d\ell_r, d\ell_\theta, d\ell_\phi)$ は，

$$\begin{aligned} d\ell_r &= dr, \\ d\ell_\theta &= rd\theta, \\ d\ell_\phi &= r\sin\theta d\phi \end{aligned} \tag{A.3}$$

で与えられる．したがって，無限小体積 dV は，

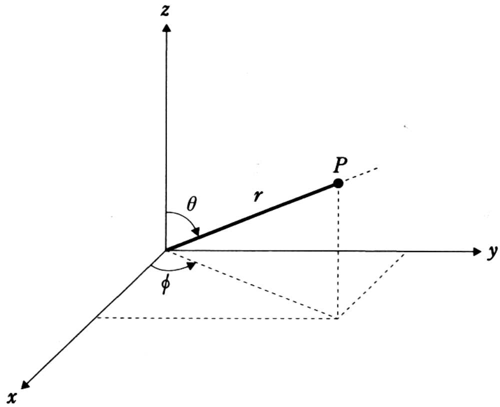


図 **A.1**　極座標 (r, θ, ϕ) の定義

$$\begin{aligned} dV &= dxdydz, \\ &= d\ell_r d\ell_\theta d\ell_\phi, \\ &= (dr)(rd\theta)(r\sin\theta d\phi), \\ &= r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \end{aligned} \tag{A.4}$$

である．

立体角 Ω は，ある点から見た空間領域を半径 1 の球面上に投影した面積で表す．したがって，無限小立体角 $(d\Omega)$ は，

$$\begin{aligned} d\Omega &\equiv \frac{d\ell_\theta d\ell_\phi}{r^2} \\ &= \sin\theta d\theta d\phi \end{aligned} \tag{A.5}$$

であり，全立体角は

$$\int d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \tag{A.6}$$

となる．立体角の単位は，sr = steradian = ステラジアンという．

B　群

群とは，以下の条件を満たす「かけ算が定義されている」集合のことであ

る．

1. 集合 G の任意の 2 つの要素（元）a_i, a_j に対して積 $(\cdot)$ が定義されていて，$a_k = a_i \cdot a_j$ となる要素 a_k が存在する．
2. 任意の a_i について，$e \cdot a_i = a_i \cdot e = a_i$ が成り立つ要素 e が存在する．e は単位元と呼ばれる．
3. 任意の a_i について，$a_i \cdot a_i^{-1} = a_i^{-1} \cdot a_i = e$ が成り立つ逆元 a_i^{-1} が存在する．
4. $(a_i \cdot a_j) \cdot a_k = a_i \cdot (a_j \cdot a_k)$ が成り立つ．

可換群とは，任意の 2 つの要素について交換関係 $a_i \cdot a_j = a_j \cdot a_i$ が成り立つ群のことで，アーベル群とも呼ばれる．これに対し，$a_i \cdot a_j \neq a_j \cdot a_i$ の場合は，非可換群（非アーベル群）と呼ばれる．

群 A の要素 a と群 B の要素 b から，対 (a, b) をつくる．このような対全体の集合は，積の演算 $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \equiv (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$ によって群をなす．この対全体の集合を $A \otimes B$ と書いて，群 A と群 B の直積群と呼ぶ．

ゲージ対称性の議論で出てくる，$U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ 群はユニタリ群と呼ばれる群の例である．n 行 n 列の複素行列 U は，ユニタリ条件

$$UU^\dagger = U^\dagger U = E \tag{B.1}$$

が成り立つとき，ユニタリ行列であるという．ここで $U^\dagger$ は行列 U のエルミート共役行列（$(U^\dagger)_{ij} = U^*_{ji}$，行列 U の各成分の複素共役をとり，行と列を入れ換えて得られる行列）で，E は n 行 n 列の単位行列である．2 つのユニタリ行列の積もまたユニタリ行列である．したがってユニタリ行列の集合は群をなす．この群を $U(n)$ と表す．U の行列式 $\det(U)$ について，

$$\begin{aligned}\det(UU^\dagger) &= \det(U)\det(U^\dagger) = \det(U)(\det(U))^* = |\det(U)|^2 \\ &= \det(E) = 1\end{aligned} \tag{B.2}$$

が成り立つので，$\det(U) = \exp(i\theta)$（θ は実数）と書くことができる．

特殊ユニタリ群 $SU(n)$ は，行列式の値が $1 (\det(SU(n)) = 1)$ のユニタリ行列からなる群で，$U(n)$ 群の部分集合である．$U(n)$ 群の任意の要素は，$SU(n)$ の要素と位相 $\exp(i\theta)$ の積で表される．位相 $\exp(i\theta)$ は $U(1)$ の要素

であるから，$U(n)$ 群は，$U(1)$ 群と $SU(n)$ 群の直積群

$$U(n) = U(1) \otimes SU(n) \tag{B.3}$$

である．

C　強い相互作用のゲージ理論

クォークはレプトンと異なり，3 種類のカラーと呼ばれる内部量子数をもっている．すなわち，クォークフレーバーのそれぞれがカラーについて 3 重項をなしている．たとえば，u クォークは，u_r, u_b, u_g（ここで，r, b, g はそれぞれ red, blue, green の 3 種のカラー量子数を表している）からなっている：

$$u = \begin{pmatrix} u_r \\ u_b \\ u_g \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

ここで，u_r, u_b, u_g はそれぞれ 4 成分のディラックスピノルである．したがって，クォークの（相互作用がないときの）ラグランジアンは，同一質量の 3 つの粒子のディラック・ラグランジアンの和で表される：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\{i\hbar c\overline{\psi_r}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_r - mc^2\overline{\psi_r}\psi_r\} + \{i\hbar c\overline{\psi_b}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_b - mc^2\overline{\psi_b}\psi_b\} \\ &+ \{i\hbar c\overline{\psi_g}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_g - mc^2\overline{\psi_g}\psi_g\}\end{aligned} \tag{C.2}$$

ここで，

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

を定義すると，

$$\overline{\psi} = (\overline{\psi_r},\ \overline{\psi_b},\ \overline{\psi_g}) \tag{C.4}$$

であるから，$\mathcal{L}$ は，1 粒子のディラック方程式と同一に表現できる：

$$\mathcal{L} = i\hbar c\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^2\overline{\psi}\psi \tag{C.5}$$

同一質量の 2 粒子ラグランジアンが $U(2)$ 対称性をもっているのと同様に，このラグランジアンは $U(3)$ 対称性をもっている．すなわち，$\mathcal{L}$ は，U を 3 行 3 列のユニタリ行列 $(UU^{\dagger} = 1)$ とすると，

$$\psi \to U\psi \quad (\overline{\psi} \to \overline{\psi}U^{\dagger}) \tag{C.6}$$

の変換で不変である．3 行 3 列のユニタリ行列は，3 行 3 列のエルミート行列 $(H^{\dagger} = H)$ によって，$U = \exp(iH)$ と書ける．さらに，3 行 3 列のエルミート行列は，9 個の実定数 $\theta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_8$ を使って，

$$H = \theta E + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots + \alpha_8\lambda_8 \tag{C.7}$$

と書くことができる．ここで，E は 3 行 3 列の単位行列，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_8$ は，ゲルマン (Gell-Mann) 行列と呼ばれる 8 つの行列である：

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{C.8}$$

したがって，任意の 3 行 3 列のユニタリ行列は，

$$U = \exp(i\theta)\exp(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\lambda}) \tag{C.9}$$

と表される．ここで，

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots + \alpha_8\lambda_8 \tag{C.10}$$

である．$\exp(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\lambda})$ のなす群を $SU(3)$ という．カラーに関する $SU(3)$ ($SU(3)_C$) のローカルゲージ対称性から導かれる理論を量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) と呼ぶ．ラグランジアン (C.5) を $\psi\to S\psi$, $S=\exp(-ig_s\boldsymbol{\alpha}(x^\nu)\cdot\boldsymbol{\lambda}/\hbar c)$ のローカル変換で不変にするには，共変微分

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{g_s}{\hbar c}\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{G}_\mu \tag{C.11}$$

を導入する必要がある．ここで，$\mathbf{G}_\mu$ は，8 個のゲージ場からなるベクトル

$$\mathbf{G}_\mu = (G_{1\mu}, G_{2\mu}, \cdots, G_{8\mu}) \tag{C.12}$$

である．実定数 g_s は，クォークとゲージ場 $\mathbf{G}_\mu$ との結合の強さを表す結合定数である．$SU(2)_L$ のゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ 同様，$\mathbf{G}_\mu$ は，$\mathcal{D}_\mu(S\psi) = S(\mathcal{D}_\mu\psi)$ が成り立つように変換されなければならない．したがって，$\mathbf{G}_\mu$ は，

$$\begin{aligned}\mathbf{G}'_\mu\cdot\boldsymbol{\lambda} &= S\mathbf{G}_\mu\cdot\boldsymbol{\lambda}S^{-1} + i\frac{\hbar c}{g_s}(\partial_\mu S)S^{-1}\\ &= S\mathbf{G}_\mu\cdot\boldsymbol{\lambda}S^{\dagger} + i\frac{\hbar c}{g_s}(\partial_\mu S)S^{\dagger}\end{aligned} \tag{C.13}$$

のように変換されねばならない．S について無限小変換 ($|\boldsymbol{\alpha}(x^\nu)| \ll 1$, $S\approx E - i\frac{g_s}{\hbar c}\boldsymbol{\alpha}(x^\nu)\cdot\boldsymbol{\lambda}$) を考えると，

$$\mathbf{G}'_\mu = \mathbf{G}_\mu - 2(\boldsymbol{\alpha}(x^\nu)\times\mathbf{G}_\mu) - \frac{\hbar c}{g_s}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(x^\nu) \tag{C.14}$$

が導かれる．ここで，$\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{G}_\mu$ は，

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i = \sum_{j,k=1}^{8} f_{ijk}A_jB_k \tag{C.15}$$

によって与えられる．f_{ijk} は，$SU(3)$ 群の構造定数と呼ばれ，任意の添え字の交換で符号を換える（たとえば，$f_{ijk} = -f_{jik}$）．f_{ijk} のうち，0 でない定数は，$f_{123} = 1, f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2$, $f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$ である．

以上より $SU(3)_C$ でゲージ不変なラグランジアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - mc^2\overline{\psi}\psi\\ &= i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\overline{\psi}\psi - g_s(\overline{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\lambda}\psi)\cdot\mathbf{G}_\mu\end{aligned} \tag{C.16}$$

となる．8個のゲージ場に対応する8個のゲージボソンをグルーオンと呼ぶ．つまり，強い相互作用は3種類のカラーをもったクォークが8個のグルーオンを交換することによって起こるのである．

さらに，グルーオンの運動を表すラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{gluon}}$ は，

$$\mathbf{G}^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu}\mathbf{G}^{\nu} - \partial^{\nu}\mathbf{G}^{\mu} - \frac{2g_s}{\hbar c}(\mathbf{G}^{\mu} \times \mathbf{G}^{\nu}) \tag{C.17}$$

で定義されるテンソルを使うと，

$$\mathcal{L}_{\text{gluon}} = -\frac{1}{16\pi}\mathbf{G}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{G}_{\mu\nu} \tag{C.18}$$

と書くことができる．$SU(2)_L$ の $\mathbf{W}^{\mu\nu}$ 同様，このラグランジアンからグルーオンどうしの相互作用が導かれる．また，$SU(3)_C$ に自発的対称性の破れはなく，グルーオンはフォトン同様，質量をもたないゲージボソンである．

参考文献

素粒子物理学全般についてもっと勉強したい人のために，いくつかの優れた教科書をあげておく．学部専門課程レベルの教科書として，

『素粒子物理学』坂井典佑（培風館，1993）
『素粒子物理入門』渡部靖志（培風館，2002）
『素粒子物理』戸塚洋二（岩波書店，2003）

大学院レベルの教科書として，

『クォークとレプトン』F. ハルツェン・A.D. マーチン，小林徹郎・広瀬立成訳（培風館，1986）
『素粒子物理学の基礎 I，II』長島順清（朝倉書店，1998）

などがある．

「はじめに」でも述べたように，量子力学の習得には（1冊ではなく）いくつかの教科書を読み，多くの演習問題を解くなどして十分な時間をかける必要がある．ここでは，学部1，2年生用の優れた入門書として

『量子力学 I』川村清（産業図書，1996）
『量子論入門講義』米谷民明（培風館，1998）

をあげておく．相対論には，本書で解説した特殊相対性理論と重力理論を含む一般相対性理論とがある．相対論の入門書としては，

『相対性理論入門講義』風間洋一（培風館，1997）

一般相対性理論まで含んだ相対論の全容を学びたい人のために，たとえば，

『相対性理論』佐藤勝彦（岩波書店，1996）

がある．最後に，ゲージ理論をきわめたい人は

『ゲージ場の量子論 I，II』久後汰一郎（培風館，1989）
『ゲージ場の理論』藤川和男（岩波書店，2001）

などを参照されたい．

索　引

ナ 行

ハ 行

マ 行

ヤ 行

著者略歴

相原博昭（あいはら・ひろあき）

1956 年　生まれ．
1984 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了．
現　在　東京大学大学院理学系研究科教授．理学博士．

素粒子の物理

2006 年 4 月 10 日　初　版

［検印廃止］

著　者　相原博昭
発行所　財団法人 東京大学出版会
代表者 岡本和夫
113-8654 東京都文京区本郷 7-3-1 東大構内
電話 03-3811-8814　Fax 03-3812-6958
振替 00160-6-59964
URL http://www.utp.or.jp/
印刷所　大日本法令印刷株式会社
製本所　矢嶋製本株式会社

ISBN 4-13-062608-6 Printed in Japan